УДК 532.5

РАЗВИТИЕ ЛАГРАНЖЕВА ПОДХОДА ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОЛЕЙ ПАССИВНОЙ ПРИМЕСИ

Н.А. Лебедева

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

lebedeva@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Развивается полный лагранжев подход [1, 2] для описания эволюции и сингулярностей дифференциальных характеристик полей пассивной примеси в различных гидро- и газодинамических течениях. В качестве пассивной примеси может выступать любая физическая величина, которая не влияет на течение (поле скорости). Диффузионный перенос параметров не учитывается. Под дифференциальными характеристиками пассивной примеси можно понимать, например, различные характеристики фазы частиц в двухфазных дисперсных течениях: градиенты плотности и температуры, производные компонент скорости и завихренность. Также метод применим для исследования градиентов таких величин, как: температура в течениях с большим числом Пекле, завихренность в невязких потоках, вмороженное магнитное поле, слабые неоднородности плотности в быстрых течениях неоднородных жидкостей и т.д.

Ключевые слова: лагранжев подход, градиент пассивного скаляра, пассивная примесь, стратифицированная жидкость.

Пусть имеется пассивная примесь ρ_s, переносимая со скоростью $\mathbf{v}_s$ и не влияющая на известное поле скорости несущего потока $\mathbf{v}$. В общем случае скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_s$ различны, как, например, при переносе пассивных инерционных частиц в дисперсном течении, однако имеется широкий класс течений, в которых пассивная примесь переносится со скоростью потока $\mathbf{v}$ (например перенос слабых неоднородностей плотности в быстрых течениях неоднородных жидкостей). Пусть в начальный момент времени $t = 0$ известно распределение $\rho_s(t = 0, \mathbf{r}_0) = \rho_{s0}(\mathbf{r}_0)$ в точках $\mathbf{r}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ области G. Для вычисления лагранжевых траекторий $\mathbf{r}_s(t, \mathbf{r}_0)$, по которым переносится ρ_s, используется уравнение движения

$$\partial\mathbf{r}_s/\partial t = \mathbf{v}_s. \quad (1)$$

В случае когда $\mathbf{v}_s = \mathbf{v}$ или $\mathbf{v}_s$ – известная функция, уравнения (1) достаточно для определения $\mathbf{r}_s(t, \mathbf{r}_0)$. Для поля $\mathbf{v}_s \neq \mathbf{v}$ продемонстрируем суть метода на примере двухфазного дисперсного течения, в котором пассивные инерционные частицы с пренебрежимо малой объемной долей движутся в потоке под действием межфазной силы $\mathbf{f}_s$:

$$\partial\mathbf{v}_s/\partial t = \mathbf{f}_s. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{f}_s$ – известная функция параметров обеих фаз, например сила сопротивления Стокса $\mathbf{f}_s = \beta(\mathbf{v}_s - \mathbf{v})$, в которой β – константа, зависящая от физических свойств фаз.

Для вычисления дифференциальных характеристик (градиента, дивергенции, ротора) ρ_s по пространственным эйлеровым координатам $\mathbf{r} = (x_1, x_2, x_3)$ как функций лагранжевых координат $\mathbf{r}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$ вдоль траекторий движения пассивной примеси рассмотрим зависимость дифференциального оператора Гамильтона $\nabla = (\partial/\partial x_i)$ по эйлеровым декартовым координатам от аналогичного оператора $\nabla_0 = (\partial/\partial x_{i0})$ по лагранжевым координатам:

$$\nabla\rho_s = J^{-1}\nabla_0\rho_s, \quad \nabla\cdot\rho_s = J^{-1}\nabla_0\cdot\rho_s,$$
$$\nabla\times\rho_s = J^{-1}\nabla_0\times\rho_s. \quad (3)$$

Эти соотношения получены по правилу дифференцирования сложной функции. Здесь в первом выражении ρ_s – скалярная величина, а в остальных – векторная. В (3) $J = (J_{ij}) = (\partial x_i/\partial x_{j0})$ – матрица Якоби перехода от эйлеровых координат к лагранжевым. Уравнения для J_{ij} вдоль траекторий получаются путем дифференцирования (1) и (2) по лагранжевым координатам [1, 2]:

$$\partial J_{ij}/\partial t = \Omega_{ij}, \quad \partial\Omega_{ij}/\partial t = \partial f_{si}/\partial x_{0j}. \quad (4)$$

Начальные условия для (1), (2), (4) имеют вид:

$$t = 0: \; x_{si} = x_{0i}, \quad v_{si} = v_{0i}, \quad J_{ii} = 1,$$
$$J_{ij}(i \neq j) = 0, \quad \Omega_{ij} = \partial v_{0i}/\partial x_{0i}, \quad i, j = 1,2,3. \quad (5)$$

Чтобы замкнуть систему (1)–(5), необходимы дополнительные уравнения для определения дифференциальных по лагранжевым координатам

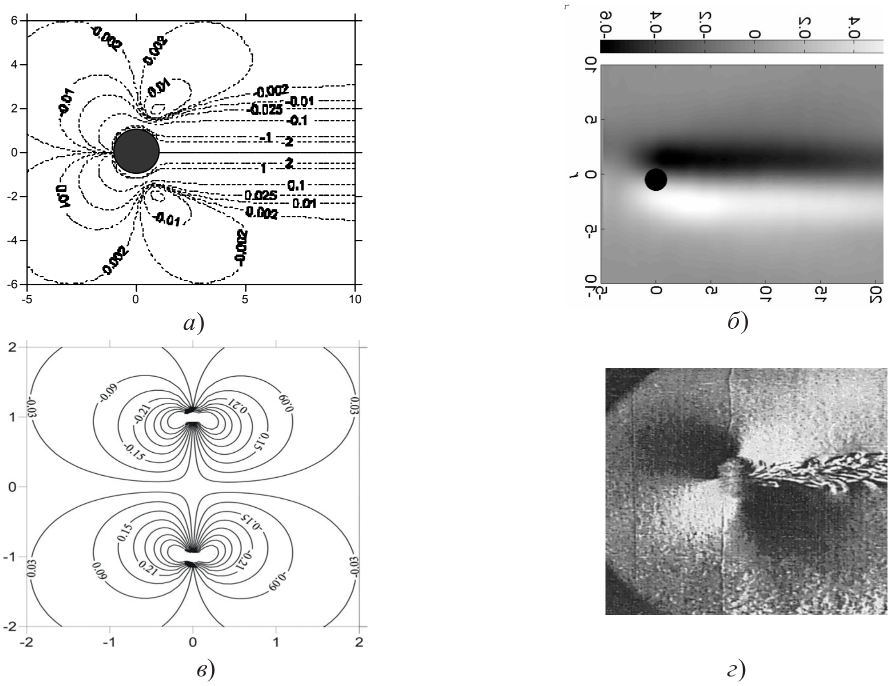

Рис. 1. Изолинии (*а*) и экспериментальная теневая картина из [3] (*б*) для $\partial\rho/\partial y$ при стационарном обтекании сферы невязким потоком с продольным градиентом плотности $\nabla_0\rho_0 = (1;0)$. Изолинии (*в*) и экспериментальная теневая картина из [4] (*г*) для $\partial\rho/\partial x$ вблизи вихревого кольца, движущегося в потоке с поперечным градиентом плотности $\nabla_0\rho_0 = (0;1)$

характеристик $\nabla_0\rho_s$, $\nabla_0\cdot\boldsymbol{\rho}_s$ и $\nabla_0\times\boldsymbol{\rho}_s$, которые присутствуют в (3). Имеется широкий класс течений, в которых некоторая пассивная примесь сохраняет свое значение вдоль траектории: $\rho_s(t, \mathbf{r}_0) \equiv \rho_{s0}$. В качестве ρ_s может выступать, например, плотность ρ в быстрых течениях неоднородных несжимаемых жидкостей (рис. 1). В этом случае замыкающее соотношение для (1)–(5) получается применением оператора ∇_0 к уравнению сохранения. Для вычисления градиента плотности оно имеет вид $\nabla_0\rho = \nabla_0\rho_0$. В общем случае ρ_s не сохраняет своего значения вдоль лагранжевой траектории, а удовлетворяет некоторому уравнению эволюции, из которого аналогично получаются уравнения для дифференциальных характеристик по лагранжевым координатам. Например, в двухфазном течении с инерционными дисперсными частицами (рис. 2) используются следующие уравнения: при вычислении градиентов концентрации ∇n_s и температуры ∇T_s фазы частиц для нахождения $\nabla_0 n_s$ и $\nabla_0 T_s$ используются соотношения и $\partial(\nabla_0 T_s)/\partial t = c(J\nabla T - \nabla_0 T_s)$, полученные из уравнений неразрывности и обмена теплом соответственно (T – известная температура несущей фазы, c – константа, зависящая от физических свойств фаз); для нахождения завихренности $\boldsymbol{\omega}_s = \nabla\times\mathbf{v}_s$ используется преобразованное уравнение (2):

$$\partial(\nabla_0\times\mathbf{v}_s)/\partial t = \beta(J\nabla\times\mathbf{v} - \nabla_0\times\mathbf{v}_s).$$

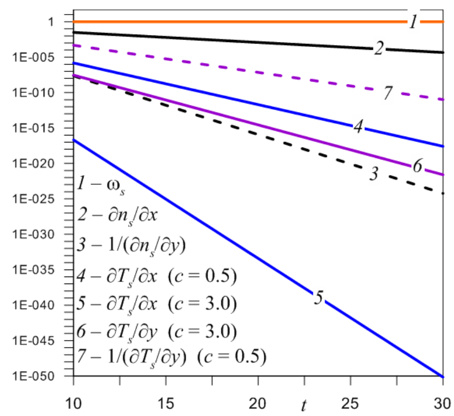

Рис. 2. Пример расчета различных дифференциальных характеристик инерционной дисперсной фазы, движущейся в окрестности плоской критической точки в идеальном несжимаемом газе с полем скорости $\mathbf{v} = (x + \lambda y, -y)$ для $\beta = 5, \lambda = 1$ и следующими граничными значениями вдали от критической точки: $\nabla_0 n_s = (1;\ 1)$, $\nabla_0 T_s = (1;\ 1)$, $\omega_{s0} = 2$

Таким образом, предлагаемый метод вычисления дифференциальных характеристик полей пассивной примеси по эйлеровым координатам вдоль лагранжевых траекторий заключается в решении системы обыкновенных дифференциальных уравнений с конечными соотношениями (1)–(5), замкнутой при помощи дополнительных уравнений для $\nabla_0\rho_s$, $\nabla_0\cdot\boldsymbol{\rho}_s$ и $\nabla_0\times\boldsymbol{\rho}_s$, которые получаются из различных уравнений эволюции для ρ_s. Подход применим для исследования течений с сингулярным поведением дифференциальных характеристик.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 11-01-00483), Аналитической ведомственной программой «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1399) и грантом Президента РФ (проект МК-3582.2011.1).

Список литературы

1. Osiptsov A.N. Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows // Astrophys. Space Sci. 2000. V. 274. P. 377–386.

2. Осипцов А.Н. Развитие лагранжева подхода для моделирования течений дисперсных сред // В сб.: Проблемы современной механики. К 85-летию со дня рождения акад. Г.Г. Черного. М.: Изд-во МГУ, 2008. С. 390–407.

3. Yick K.W., Torres C. R., Peacock T., Stocker R. Enhanced drag of a sphere settling in a stratified fluid at small Reynolds numbers // J. Fluid Mech. 2009. V. 632. P. 49–68.

4. Прохоров В.Е. Присоединенные возмущения вокруг вихревого кольца в стратифицированной жидкости // Изв. РАН. МЖГ. 2010. №4. С. 59–68.

THE DEVELOPMENT OF THE LAGRANGIAN APPROACH FOR STUDYING DIFFERENTIAL CHARACTERISTICS OF PASSIVE-ADMIXTURE FIELDS

N.A. Lebedeva

The study is devoted to the development of the full Lagrangian approach for describing the evolution and the formation of singularities of differential characteristics of passive-admixture fields in various hydro- and gasdynamic flows. As a passive scalar one may regard an arbitrary physical quantity which is transported at the carrier-flow velocity and makes no impact on the carrier-flow velocity field. The diffusion transport of the scalar is ignored. The differential characteristics of the passive admixture may include, for instance, different differential parameters of a dispersed phase in two-phase flows, such as gradients of density and temperature, derivatives of the velocity components, vorticity, etc. The method is also applicable to the investigation of such parameters as temperature gradients in single-phase flows with a high Peclet number, the vorticity in inviscid flows, the frozen magnetic field, the electric charge, weak density nonuniformities in fast flows of stratified fluids, etc.

Keywords: Lagrangian approach, passive scalar gradient, passive admixture, stratified fluid.