Механика жидкости и газа
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (3), с. 930–931

УДК 532.685

ОБ ОПИСАНИИ ФИЛЬТРАЦИИ ПРИ НАЛИЧИИ ПРЕДЕЛЬНОГО ГРАДИЕНТА

Н.Е. Леонтьев

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

leontiev_n@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Обсуждаются уравнения, описывающие течения слабосжимаемой жидкости в слабодеформируемом пористом скелете при наличии начального (предельного) градиента давления. Изучается влияние квадратичного слагаемого, которое обычно отбрасывается при получении уравнений упругого режима, на качественное поведение решений. Учет дополнительного слагаемого может приводить к качественному изменению поведения скорости фильтрации на больших расстояниях от передней границы возмущения давления в случае одномерных решений с бегущими плоскими волнами. На примере приближенных решений одномерных задач о закачке жидкости в пласт демонстрируется, что использование полных уравнений может менять асимптотику закона движения границы возмущенной области при больших временах.

Ключевые слова: пористая среда, начальный градиент, упругий режим фильтрации, неньютоновские жидкости.

В ряде фильтрационных процессов (движение воды в глинах, перемещение некоторых нефтей в природных пластах) возникает ситуация, когда жидкость, заполняющая пористый скелет, начинает течение при превышении градиентом давления некоторого ненулевого порогового значения. Такое поведение обычно связано с отличием реологии жидкости от ньютоновской (возможно, только в тонком слое на границе жидкости и пористого скелета) и может приближенно описываться с помощью закона фильтрации с предельным градиентом [1–3]:

$$\nabla p = -\Phi(|\mathbf{u}|)\frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \ (\mathbf{u}\neq 0), \quad |\nabla p| \le \Phi(0) \neq 0 \ (\mathbf{u}=0),$$

где $\mathbf{u}$ – скорость фильтрации, Φ – заданная функция.

1. Анализ уравнений

В предположении о том, что при фильтрации слабосжимаемой жидкости в слабодеформируемом пористом скелете пористость и плотность жидкости зависят только от возмущения давления и эта зависимость линейна

$$m(p) = m_0\left(1+\frac{p-p_0}{K_m}\right), \ \rho(p) = \rho_0\left(1+\frac{p-p_0}{K_\rho}\right), (*)$$

уравнение неразрывности

$$(\rho m)'_t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0$$

приводится к виду

$$\underbrace{\frac{1}{K}p'_t}_{(1)} + \underbrace{\frac{1}{K_\rho}\nabla p\cdot\mathbf{u}}_{(2)} + \underbrace{\operatorname{div}\mathbf{u}}_{(3)} = 0, \quad K = \left(\frac{1}{K_\rho}+\frac{1}{K_m}\right)^{-1}.$$

Как правило, слагаемое (2) мало по сравнению с членом (3) и отбрасывается [3], однако оценки показывают, что слагаемые (1) и (2) могут иметь одинаковый порядок:

$$\frac{(1)}{(2)} \sim \frac{\delta x}{\delta t u} \sim 1,$$

поэтому при сохранении нестационарного слагаемого (1) нужно, вообще говоря, сохранять в уравнениях и слагаемое (2), причем учет в (∗) квадратичных членов не изменит полученных оценок. Отметим также, что в случае фильтрации с предельным градиентом при $u \to 0$ (т.е. в окрестности границы возмущенной зоны) градиент давления остается конечным, и оставляемое нелинейное слагаемое (2) будет величиной первого порядка по u.

2. Решения в виде бегущей волны

Рассмотрим одномерное (с плоскими волнами) течение в виде бегущей волны, распространяющейся с постоянной скоростью V в положительном направлении оси x по состоянию с нулевым давлением [4]:

$$p = p(\xi), \quad u = u(\xi), \quad \xi = x - Vt, \quad V = \text{const}.$$

На слабом разрыве (границе фронта) ставятся условия баланса массы и импульса:

$$[\rho(u_n - mD)] = 0, \quad [mp] = 0.$$

При использовании неупрощенного уравнения неразрывности скорость фильтрации, определяемая уравнением

$$\int_0^u \frac{du}{\Phi(u)(u/K_\rho - mV/K)} = \xi - \xi_0 \le 0, \quad \xi_0 = \text{const},$$

ограничена: $u < mVK_\rho/K = u_\infty$ и, например, для закона фильтрации

$$\Phi(x) = \frac{\mu}{k}x + G, \quad \Phi(0) = G > 0,$$

имеет вид

$$\frac{kK_\rho}{\mu}\frac{1}{Gk/\mu + mVK_\rho/K}\times$$

$$\times\left\{\ln\left|\frac{uK}{mVK_\rho} - 1\right| - \ln\left|\frac{u\mu}{Gk} + 1\right|\right\} = \xi - \xi_0.$$

В то же время при использовании традиционного вида уравнения неразрывности скорость фильтрации в этом случае дается соотношением

$$-\frac{kK}{\mu mV}\ln\left|\frac{u\mu}{Gk} + 1\right| = \xi - \xi_0$$

и стремится к бесконечности при $x \to -\infty$.

3. Задача о закачке в пласт

Использование неупрощенного уравнения в задаче о закачке жидкости в пласт, интересной с точки зрения приложений, дает закон движения границы возмущенной области, отличный от закона, получаемого в рамках традиционной модели.

Приближенное решение получается с помощью метода интегральных соотношений [5]. В случае движения с плоскими волнами (закачка жидкости с помощью галереи скважин с постоянным объемным расходом) для зависимости длины возмущенной зоны L от времени при $t \to \infty$ получается асимптотическая зависимость $L \sim t$, в то время как упрощенная система дает зависимость $L \sim t^{1/2}$. В осесимметрической задаче (закачка жидкости в горизонтальный пласт через скважину с постоянным объемным расходом) соответственно получаются зависимости $L \sim t^{1/2}$ и $L \sim t^{1/3}$ [1, 6].

Работа поддержана РФФИ (проекты №11-01-00051, 11-01-00188, 11-01-90417).

Список литературы

1. Бернадинер М.Г., Ентов В.М. Гидродинамическая теория фильтрации аномальных жидкостей. М.: Наука, 1975. 200 с.

2. Бондаренко Н.Ф. Физика движения подземных вод. Л.: Гидрометеоиздат, 1973. 216 с.

3. Михайлов Г.К., Николаевский В.Н. Движение жидкостей и газов в пористых средах. В кн.: Механика в СССР за 50 лет. В 4-х т. Т. 2. Механика жидкости и газа / Под ред. Л.И. Седова и др. М.: Наука, 1970. С. 585–648.

4. Леонтьев Н.Е., Тимофеева А.С. Течения вязкопластических жидкостей в пористых средах // Ломоносовские чтения: Тез. докл. науч. конф. Секция механики. Москва, 16-25 апреля 2010. М.: Изд-во МГУ, 2010. С. 129.

5. Баренблатт Г.И. О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме // Изв. АН СССР. ОТН. 1954. №9. С. 35–49.

6. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984. 208 с.

ON THE DESCRIPTION OF FLOWS IN POROUS MEDIA WITH THE INITIAL GRADIENT

N.E. Leontiev

The equations governing the flows of a weakly-compressible fluid through a weakly-deformable porous medium accounting for the presence of initial (limit) pressure gradient are discussed. The influence of a quadratic term, which is usually dropped in deriving the linear equations of elastic regime, on the qualitative behaviour of the solutions is studied. The taking account of the additional term is shown to qualiatively change the asymptotics of the Darcy velocity for one-dimensional travelling wave solutions. The change in the wave front motion law for large times is demonstrated by an example of the solution to the axisymmetric problem of fluid injection into a porous bed.

Keywords: porous medium, initial pressure gradient, non-Darcian flows.