УДК 532.3

# НЕЛИНЕЙНАЯ ЗАДАЧА О ДВИЖЕНИИ ЦИЛИНДРА ПОД СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ



***Н.И. Макаренко, В.К. Костиков***

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

makarenko@hydro.nsc.ru

*Поступила в редакцию 16.05.2011*

С помощью аналитических методов исследована задача о генерации нелинейных нестационарных волн на поверхности глубокой идеальной жидкости погруженным эллиптическим цилиндром. Используется метод сведения исходной постановки к интегро-дифференциальной системе уравнений для функции, задающей возвышение свободной поверхности, а также нормальной и тангенциальной составляющей скорости на свободной поверхности. Для случая движения цилиндра с постоянным ускорением из состояния покоя построена начальная по времени асимптотика решения задачи.

*Ключевые слова:* идеальная жидкость, нелинейные волны, погруженный цилиндр, асимптотические методы.

## Исходные уравнения

Задача о нестационарном волновом движении жидкости при наличии погруженных тел актуальна в связи с необходимостью моделирования поведения на волнении больших морских сооружений и элементов их конструкций. Движение идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести описывается гидродинамическими уравнениями Эйлера для вектора скорости $(U, V)$ и давления $p$:

$$\begin{cases} U_t + UU_x + VU_y + p_x = 0, \\ V_t + UV_x + VV_y + p_y = -\lambda, \\ U_x + V_y = 0, \; U_y - V_x = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

с условием постоянства давления и нелинейным кинематическим условием на свободной границе $y = \eta(x, t)$. Система уравнений (1) записана в безразмерной форме с числом Фруда $\lambda = gh_0/u_0^2$, где $h_0$ и $u_0$ – характерные глубина погружения и скорость тела. Для тела, полностью погруженного в жидкость и движущегося по заданной траектории, нормальная компонента вектора скорости жидкости на его поверхности должна совпадать с нормальной компонентой скорости перемещения самой твердой поверхности. Требуется определить поле скоростей жидкости и форму свободной границы, если они известны в начальный момент времени. Разрешимость данной нелинейной задачи до недавнего времени оставалась неисследованной даже в локальной по времени постановке.

## Интегро-дифференциальные уравнения на свободной границе

Эффективным способом аналитического исследования задачи о движении тела в идеальной жидкости является предложенный в [1] метод редукции исходных уравнений с заранее неизвестной областью определения искомых величин к системе интегро-дифференциальных уравнений на свободной границе. При наличии тела, погруженного в жидкость, указанная система имеет вид

$$\eta_t = v, \quad u_t + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2 - 2\eta_x uv - v^2}{1+\eta_x{}^2}\right) + \lambda\eta_x = 0,$$

$$\pi v(x) + v\,p\int_{-\infty}^{+\infty} A(x,s)v(s)ds = \qquad (2)$$

$$= v\,p\int_{-\infty}^{+\infty} B(x,s)u(s)ds + v_{\mathrm{curl}}(x) + v_{\mathrm{dip}}(x),$$

где $u$ и $v$ – касательная и нормальная компоненты скорости жидкости (время $t$ входит в интегральное уравнение для нормальной скорости только как параметр). Ядра $A$, $B$ и функции $v_{\mathrm{curl}}$, $v_{\mathrm{dip}}$, нелинейно зависящие от формы свободной поверхности $\eta(x, t)$, в случае кругового цилиндра удается выписать [2] на основе теоремы Милн – Томсона. Тем самым в задаче исключается необходимость рассматривать вклад членов, содержащих интегралы по поверхности обтекаемого тела. Вывод указанного интегрального уравнения является достаточно трудоемким и использует представление комплексной скорости жидкости $F(z,t) = U - iV\,(z = x + iy)$, которое содержит интегралы только по свободной границе. В случае эллиптического цилиндра такое представление получается с помощью обобщения теоремы Милн – Томсона [3] и имеет следующий вид:

$$2\pi i F(z,t) = \int\limits_{\Gamma} \frac{F(\zeta,t)d\zeta}{\zeta - z} + \left( r^2 \int\limits_{\Gamma} \overline{\frac{F(\zeta,t)d\zeta}{\tau(\zeta) - \tau_*(z)}} - \right.$$

$$\left. - \frac{c^2}{4} \int\limits_{\Gamma} \overline{\frac{F(\zeta,t)d\zeta}{\tau(\zeta) - (c^2/4r^2)\tau_*(z)}} \right) \frac{\tau'(z)}{\tau^2(z)} + \gamma \frac{\tau'(z)}{\tau(z)} +$$

$$+ 2\pi i \left( r^2 z'_{cyl}(t) - \frac{c^2}{4} \overline{z'_{cyl}(t)} \right) \frac{\tau'(z)}{\tau^2(z)}.$$

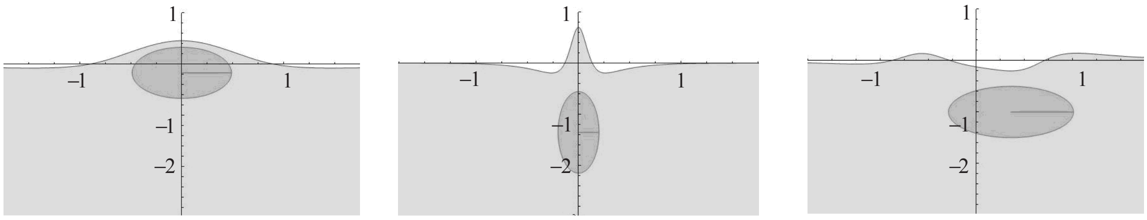
Здесь $F(\zeta, t)$ – вспомогательная аналитическая функция, дающая конформное отображение внешности эллипса с эксцентриситетом $c$ на внешность круга радиуса $r = (a + b)/2$, где $a$ и $b$ – полуоси эллипса. Построение в явном виде ядер интегральных операторов, описывающих взаимодействие цилиндра со свободной поверхностью, позволяет охарактеризовать структуру асимптотического ряда по степеням малого параметра заглубления цилиндра и исследовать начальную по времени асимптотику решения задачи о движении эллиптического цилиндра вблизи свободной границы.

Ряд (3) адекватно описывает начальную стадию движения, включающую в себя фазу формирования инерционного слоя жидкости в окрестности ускоряющегося тела и последующую фазу начала образования волнового следа. На рис. 1 показаны формы свободной поверхности: *а* – всплытие, *б* – погружение, *в* – горизонтальное движение эллиптического цилиндра.

Такая схема движения, описываемая построенным решением, хорошо согласуется с наблюдаемым в экспериментах и численных расчетах [4] процессом движения тела вблизи свободной поверхности.

Так, при вертикальном погружении цилиндр на ранней стадии движения вовлекает жидкость за собой, после чего свободная поверхность выгибается вверх с образованием струи всплеска. При медленном движении тела вблизи свободной поверхности успевают образоваться системы расходящихся волн, а при быстром выходе цилиндра из жидкости рассматриваемое решение описывает эффект инерционного выноса массы жидкости.

***Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-01-00427, по Программе РАН № 20 (проект № 4) и гранту Правительства России для государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых в российских вузах (11.G34.31.0035).***




*а*) *б*) *в*)

Рис. 1

### Начальная асимптотика волнового движения

Рассмотрим начальную стадию движения, возникающего из состояния покоя, когда в момент времени $t = 0$ эллиптический цилиндр находится на заданной глубине. В этом случае задача сводится к нахождению коэффициентов в разложении решения уравнений (2) по степеням $t$ вида

$$\eta(x,t) = \eta_2(x)t^2 + \eta_3(x)t^3 + \eta_4(x)t^4 + \ldots \quad (3)$$

*Список литературы*

1. Овсянников Л.В. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука, 1985. 320 с.

2. Makarenko N.I. // JOMAE Transaction of the ASME. 2003. V. 125, No 1. P. 72–75.

3. Makarenko N.I. // Proc. 23rd Int. Conf. on Offshore Mech. and Arctic Engineering. June 20–25, 2004. Vancouver, Canada. Paper OMAE-51413.

4. Zhu X., Faltinsen O.M., Hu C. // JOMAE Transaction of the ASME. 2007. V. 129, No 4. P. 253–265.

**NONLINEAR PROBLEM OF THE MOTION OF A CYLINDER UNDER A FREE SURFACE**

***N.I. Makarenko, V.K. Kostikov***

The problem of nonlinear non-stationary surface waves in a deep ideal fluid generated by submerged elliptic cylinder is investigated. The method involves the reduction of basic equations to an integral-differential system for the free surface elevation, as well as for normal and tangential fluid velocities at the free surface. Small-time solution asymptotics is constructed for the case where the cylinder moves with constant acceleration from the state of rest.

*Keywords:* ideal fluid, nonlinear waves, submerged cylinder, asymptotic methods.