

УДК 532.546:532.517

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОКРЕСТНОСТИ ПОРИСТОЙ ГРАНИЦЫ

© 2011 г.

Е.В. Мосина, И.В. Чернышев

Волгоградский госуниверситет

katefrkate@mail.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Решена задача о медленном двумерном течении вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале, частично заполненном модельной волокнистой пористой средой, представленной регулярной системой квадратных цилиндров, расположенных поперек потока. Рассмотрено два вида течений: сдвиговое за счет движения верхней стенки канала и градиентное из-за наличия перепада давления вдоль канала. Численно найдены гидродинамические микроскопические поля скорости. В результате усреднения получены такие макропараметры, как скорость фильтрации, проницаемость системы цилиндров, расход жидкости сквозь канал, касательные напряжения на верхней стенке канала и пористой границе, коэффициент скольжения, использование которых в граничном условии скольжения Саффмана позволяет замкнуть постановки макроскопических задач о течении жидкости в окрестности пористой границы.

Ключевые слова: приближение Стокса, модельная волокнистая пористая среда, уравнение Дарси, граничное условие Саффмана, проницаемость, коэффициент скольжения.

Микроскопическая постановка задачи

В приближении Стокса рассмотрено двумерное течение несжимаемой ньютоновской вязкой жидкости в канале высотой H с плоскими непроницаемыми стенками. Нижняя часть канала занята системой твердых квадратных цилиндров, представляющих модель однородной волокнистой пористой среды. Цилиндры расположены в узлах квадратной решетки, образующие цилиндры направлены поперек потока и параллельно плоским стенкам (рис. 1).

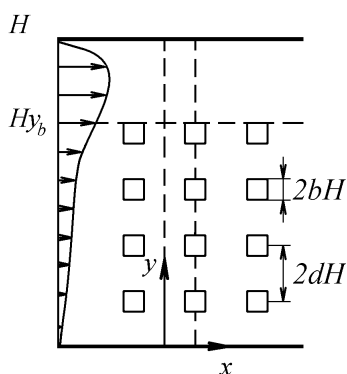


Рис. 1

Исследовано два вида течений: сдвиговое течение Куэтта, верхняя стенка движется с постоянной скоростью u_0 в направлении оси Ox , и течение Пуазейля под действием постоянного градиента давления G вдоль оси Ox . Используются в качестве линейного масштаба высоту ка-

нала H , в качестве масштаба скорости – u_0 и градиента давления – G , уравнения движения и неразрывности запишем в безразмерном виде:

$$\nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

Линейность уравнений и периодичность конфигурации канала позволили ограничиться рассмотрением области, отмеченной штриховой линией на рис. 1. На рис. 2 изображена половина одного цилиндра нижнего ряда, где обозначены соответствующие граничные условия.

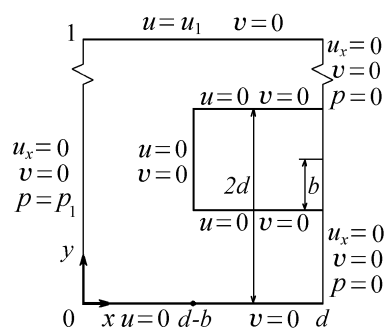


Рис. 2

Найдены микроскопические гидродинамические поля в широком диапазоне параметров: количество рядов цилиндров $L = 5 \div 20$, объемная концентрация твердых цилиндров в пористой среде $\phi = b^2/d^2 = 0.0001 \div 0.6$, степень заполненности канала цилиндрами $F = 2Ld = 0.25 \div 0.8$. Использована численная процедура на основе конечно-разностной аппроксима-

ции уравнений (1) на разнесенной неравномерной сетке со сгущениями вблизи поверхности цилиндров. Для получения стационарного решения применен метод установления по времени и метод SIMPLE [1].

Макроскопическая постановка задачи

В свободной части канала ($y_b < y \leq 1$) безразмерное уравнение движения Стокса имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx}. \quad (2)$$

Для фильтрационного течения в пористой среде используется уравнение Дарси (в безразмерном виде)

$$-\frac{1}{k} U_D = \frac{dP}{dx}, \quad U_D = \text{const}, \quad (3)$$

и на предполагаемой проницаемой границе – условие скольжения Саффмана [2, 3], допускающее разрыв (скольжение) тангенциальной составляющей скорости

$$u_s = \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \frac{du(y_b)}{dy}, \quad u_s = u_b - U_D, \quad u_b = u(y_b), \quad (4)$$

где k – проницаемость пористого материала, α – коэффициент скольжения, зависящий от геометрии и физических свойств пористой границы, а также от типа течения вблизи границы.

Для распределения скорости в свободной части канала $u(y)$ и пористой среде U_D могут быть записаны явные формулы. Сопоставление с этими формулами усредненных решений в микроскопической постановке позволяет найти необходимые константы (проницаемость и коэффициент скольжения) для полного описания течения жидкости в окрестности пористой границы.

Результаты

Проницаемость k получена из закона Дарси (3) для градиентного течения, в котором в качестве скорости фильтрации U_D взята усредненная по объему продольная скорость в центральном горизонтальном слое стержней [4]. Сравнение численных расчетов и известных эмпирических и аналитических выражений позволили сделать следующие выводы.

Для концентраций $\phi \leq 0.1$ с ошибкой не более 10% может быть использована формула

$$\frac{k}{b^2} = \frac{1}{\sigma^2} \frac{1}{8\phi} \left(\ln \frac{1}{\phi} - 1.476 + 2\phi \right), \quad \sigma = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Для умеренно разреженных пористых сред ($0.1 < \phi < 0.6$) подходящей аппроксимацией является

$$\frac{k}{b^2} = \frac{1}{9\phi} \left(\ln \frac{1}{\phi} - \frac{1-\phi^2}{1+\phi^2} \right),$$

для $0.6 \leq \phi < 0.8$

$$\frac{k}{b^2} = \frac{(1-\phi)^3}{24\phi^2}.$$

Коэффициент скольжения α найден из (4), где касательная составляющая скорости u_b и скорость сдвига $du(y_b)/dy$ представляют собой величины, усредненные на уровне y_b по половине периода вдоль Ox . В качестве номинальной пористой границы y_b взята плоскость, касательная к внешней поверхности цилиндров верхнего ряда.

Для сдвигового течения получена аппроксимирующая зависимость $\alpha = 3.4 + 8.3\sqrt{\phi}$ [5]. Для градиентного течения не удается отыскать похожую зависимость, необходимо учитывать и микроструктуру среды (количество рядов стержней, размеры и расстояния между стержнями), и заполненность канала F пористым материалом. В случае круговых цилиндров [6] значения коэффициента скольжения отличаются тем сильнее, чем больше объемная концентрация ϕ , поскольку для квадратных цилиндров номинальная граница содержит более протяженные участки прилипания.

Отметим, что внешнее течение слабо «проникает» внутрь пористой среды (не более двух верхних рядов стержней), поэтому гидродинамические характеристики жидкости на пористой границе практически не зависят от внутренних параметров пористой среды [4].

Таким образом, при правильном выборе соответствующих параметров k и α макроскопическая постановка (2)–(4) с высокой степенью точности аппроксимирует задачу (1) о течении в канале, нижняя часть которого занята регулярной системой квадратных стержней, моделирующей волокнистую пористую среду.

Список литературы

1. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей: В 2-х т. Т. 2. М.: Мир, 1991.
2. Beavers G.S., Joseph D.D. // J. Fluid Mech. 1967. V. 30. Part 1. P. 197–207.
3. Saffman P.G. // Stud. App. Math. 1971. V. 50, No 2. P. 93–101.
4. Мосина Е.В. // ТОХТ. 2010. Т. 44, № 5. С. 536–542.

5. Мосина Е.В., Чернышев И.В. // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 5. С. 103–110.

6. James D.F., Davis A.M.J. // J. Fluid Mech. 2001. V. 426. P. 47–72.

FLUID FLOW IN THE VICINITY OF A POROUS INTERFACE

E.V. Mosina, I.V. Chernyshev

The problem of a two-dimensional creeping flow of a viscous incompressible liquid in a flat channel partially filled with a model fibrous porous medium that is represented by a regular system of square cylinders located across the flow is analyzed. Two forms of flows are considered: a shear flow due to the motion of the upper wall of the channel and a gradient flow due to the presence of a pressure drop along the channel. The hydrodynamic microscopic fields of velocity are found numerically. The macroparameters such as the filtration velocity, the permeability of a system of cylinders, the flow rate of the liquid through the channel, tangential stresses on the upper wall of the channel and the porous boundary, and a slip coefficient are obtained as a result of averaging. Using these parameters in the Saffman slip boundary condition it is possible to complete the settings of the macroscopic boundary value problems for the fluid flow near the porous interface.

Keywords: Stokes approximation, model fibrous porous medium, Darcy equation, Saffman boundary condition, permeability, slip coefficient.