УДК 532.529.2

# ГРАВИТАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ ДИСПЕРСНЫХ СИСТЕМ В СОСУДАХ С НАКЛОННЫМИ СТЕНКАМИ



***Ю.А. Невский***

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

nevskii_u@mail.ru

*Поступила в редакцию 16.06.2011*

Построена общая двухконтинуальная гидродинамическая модель конвективного движения двухфазной дисперсной смеси, вызванного осаждением частиц примеси. Рассмотрены предельные случаи модели, описывающие гравитационную конвекцию в «больших» (по сравнению с длиной скоростной релаксации фаз) сосудах. Проведено численное моделирование гравитационной конвекции суспензий в двумерных областях с наклонными границами. Численно исследован эффект Бойкотта (уменьшение времени осаждения примеси при наклоне сосуда) и найдены углы наклона сосудов, при которых эффективная скорость оседания примеси максимальна.

*Ключевые слова:* гравитационная конвекция, частицы, дисперсная смесь, оседание частиц, эффект Бойкотта.

Рассматривается замкнутый объем, заполненный вязкой несжимаемой жидкостью, содержащей недеформируемые сферические частицы одинакового радиуса, плотность которых отлична от плотности несущей фазы. Под действием силы тяжести дисперсная фаза приходит в движение, вызывая гравитационную конвекцию в несущей фазе. В качестве основы математического описания используется приближение взаимопроникающих континуумов [1], при этом в межфазном взаимодействии учитываются силы нестационарной природы [2], а реология среды в целом предполагается ньютоновской с эффективной вязкостью, зависящей от локальной объемной доли частиц. В качестве характерных масштабов при обезразмеривании используется скорость стационарного оседания (всплытия) одиночной частицы в вязкой среде $U = mg\,|1-\eta|\,/\,6\pi\sigma\mu_0$ (здесь $m$ – масса частицы, $\sigma$ – ее радиус, $g$ – ускорение свободного падения, $\eta = \rho/\rho_s$ – отношение плотностей несущей фазы и вещества частиц, $\mu_0$ – вязкость несущей фазы) и вертикальный линейный размер сосуда $L$. Масштаб времени $T_t = L/U$. Масштаб для обезразмеривания перепада давления в случаях, рассмотренных далее, выбирается из условия сохранения члена с градиентом давления в уравнении баланса импульса для смеси.

Важными параметрами модели являются характерная длина скоростной релаксации фаз $l = mU^{-1}(6\pi\sigma\mu_0)$, характерная начальная объемная концентрация частиц $c_0$, а в случае пренебрежения объемной долей частиц – характерная начальная числовая концентрация частиц $n_{s0}$. Для простоты приведены формулы для случая, когда плотность частиц больше плотности несущей фазы, то есть $\eta < 1$. В безразмерном виде общие уравнения двухконтинуальной модели гравитационной конвекции дисперсной смеси в декартовых координатах таковы:

$$\operatorname{div}((1-c)\mathbf{v} + c\mathbf{v}_s) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} + \operatorname{div}(c\mathbf{v}_s) = 0, \quad \frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt} = \mathbf{f_s} - \frac{\beta}{1-\eta}\mathbf{j},$$

$$(1-c)\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{c}{\eta}\frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt} = -\nabla p - \frac{\beta c}{1-\eta}\left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\mathbf{j} + \frac{1}{\mathrm{Re}}\sum_i\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}\varphi_0(c)\tau_{ij}\mathbf{k}_i,$$

$$\tau_{ij} = \mu_0\left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\operatorname{div}\mathbf{v}\right],$$

$$\mathbf{f_s} = \beta\varphi_1(c)(\mathbf{v} - \mathbf{v_s}) + \frac{\eta}{2}\varphi_2(c)\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} - \frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt}\right) + \eta\varphi_3(c)\left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} + \frac{\beta}{1-\eta}\mathbf{j}\right) + \chi\beta\varphi_4(c)\int_0^t \frac{d_s\mathbf{v} - \mathbf{v}_s}{d\tau}\frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}},$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \quad \frac{d_s\mathbf{v}_s}{dt} = \frac{\partial\mathbf{v}_s}{\partial t} + (\mathbf{v}_s\cdot\nabla)\mathbf{v}_s,$$

$$\beta = \frac{L}{l} = \frac{L(6\pi\sigma\mu_0)^2}{m^2 g\,|1-\eta|}, \quad \chi = \sqrt{\frac{9\eta\beta}{2\pi}}, \mathrm{Re} = \frac{\rho UL}{\mu_0}.$$

Здесь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_s$ – скорости несущей фазы и частиц; $c$ – объемная доля дисперсной фазы; $\mathbf{j}$ – единичный базисный вектор оси $OY$, направленный против силы тяжести; $\mathbf{k}_j$ – обозначение для базисных векторов $\mathbf{k}_x = \mathbf{i}$, $\mathbf{k}_y = \mathbf{j}$, $\mathbf{k}_z = \mathbf{z}$. Вместо давления введена разность полного и гидростатического давлений, т.е. $p = (p^* - \rho g y^*)/\rho U^2$ (звездочками здесь и далее отмечены размерные величины). В межфазном взаимодействии $\mathbf{f}_s$ учтены силы Стокса, присоединенных масс, Архимеда и Бассэ–Буссинеска [2] с поправочными функциями $\varphi_{0-4}$ на конечность объемной доли частиц к составляющим межфазной силы, $\varphi_{0-4} \to 1$ при $c \to 0$.

Рассмотрим асимптотический предел: $\beta \to \infty$, $\eta/\beta \to 0$, $c_0\beta/\eta \to \infty$, $\mathrm{Re} \to 0$, $c_0\beta\,\mathrm{Re}/\eta = \mathrm{A} \sim O(1)$, соответствующий медленной гравитационной конвекции в большом (по сравнению с длиной $l$ резервуаре). Здесь А – аналог числа Грасгофа (отношение сил плавучести к силам вязкости в рассматриваемой модели). В данном пределе уравнения конвекции (1) упрощаются и принимают вид:

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) + \frac{\partial(cf)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial c}{\partial t} + \mathrm{div}(c\mathbf{v}_s) = 0,$$

$$\nabla p_1 = \sum_i \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \varphi_0(c)\tau_{ij}\mathbf{k}_i - A\left(\frac{c}{c_0}\right)\mathbf{j},$$

$$\mathbf{v_s} = \mathbf{v} - f(c,\eta)\mathbf{j},$$

$$\tau_{ij} = \mu_0\left[\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mathrm{div}\mathbf{v}\right],$$

$$\mathrm{A} = \frac{\beta\,\mathrm{Re}\,c_0}{\eta} = \frac{9}{2}\left(\frac{L}{\sigma}\right)^2 c_0, \quad f(c) = \left(1 - \frac{c}{c_m}\right)^{3.1}. \quad (2)$$

Здесь $p_1 = p\mathrm{Re}$. В качестве выражения для функции $f(c)$ использовано эмпирическое соотношение, предложенное в [3]. Дальнейшее упрощение постановки (2) может быть осуществлено в случае малой объемной концентрации дисперсной фазы, в пределе $c \to 0$. В этом пределе удобно ввести безразмерную числовую концентрацию частиц $n_s = n_s^*/n_{s0}^*$, где $n_{s0}^*$ – характерное значение размерной числовой концентрации частиц в начальный момент времени, соответствующее $c_0^*$. При этом смесь становится несжимаемой, вязкость среды постоянна, а в выражении для скорости оседания частиц исчезает поправка на стесненность обтекания $f = 1$, что позволяет получить из (2) уравнения конвекции разреженной суспензии:

$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{d_s n_s}{dt} = 0, \quad \mathbf{v_s} = \mathbf{v} - \mathbf{j}, \quad (3)$$

$$\nabla p_1 = \nabla^2\mathbf{v} - An_s\mathbf{j}.$$

Наряду с моделями «медленной» конвекции можно рассмотреть и модель «быстрой» гравитационной конвекции: $\beta \to \infty$, $c_0/\eta \to 0$, $\mathrm{Re} \to \infty$, $c_0\beta/\eta = B \sim O(1)$. При этом, в силу соотношений между параметрами, имеет смысл рассматривать «быструю» конвекцию только сильноразреженной смеси:

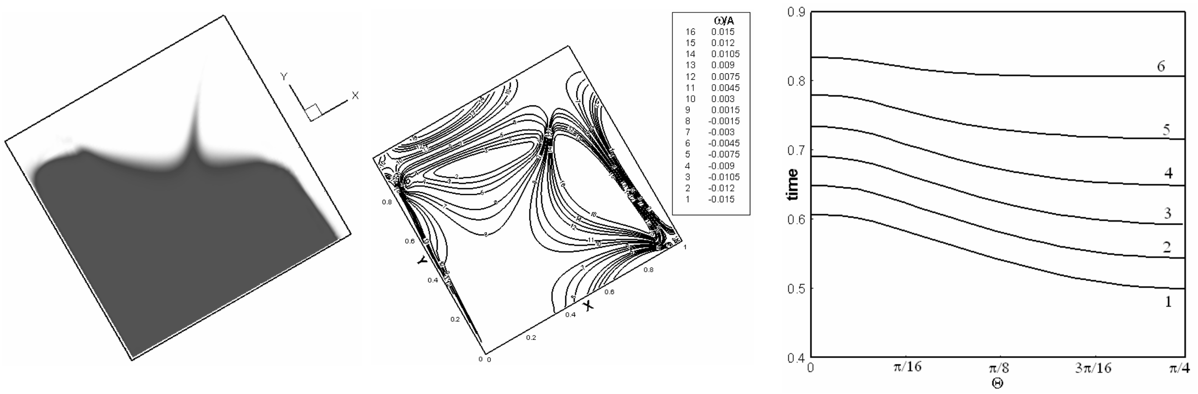
$$\mathrm{div}(\mathbf{v}) = 0, \quad \frac{d_s n_s}{dt} = 0, \quad \mathbf{v_s} = \mathbf{v} - \mathbf{j}, \quad (4)$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p - Bn_s\mathbf{j}.$$

При $c_0 \sim O(1)$, $\eta \sim O(1)$ уравнение импульса для смеси вырождается в $\nabla p = -Bn_s\mathbf{j}$.

На основе численных расчетов показано, что известный эффект уменьшения времени осаждения частиц в наклонном сосуде (эффект Бойкотта) возникает из-за появления крупномасштабных вихрей в областях с продольной неоднородностью концентрации примеси. Эффект Бойкотта возрастает с увеличением коэффициента перед силой плавучести.

Для моделей (2)–(4) получены зависимости времени осаждения примеси от угла наклона сосуда. На рис. 1 представлены возникающие в процессе гравитационной конвекции поле концентрации примеси, изолинии вихревого поля несущей фазы, а также зависимости времени, требуемого




*а*) *б*) *в*)

Рис. 1

для уменьшения исходной массы взвешенных частиц до заданных величин, от угла наклона сосуда $\Theta$.

На рисунке показаны форма границы оседающей суспензии (*а*) и изолинии завихренности (*б*) в наклонном сосуде при $A = 600$, $t = 0.17$, модель (3). Зависимость безразмерного времени, требуемого для уменьшения исходной массы частиц до величин 30, 25, 20, 15, 10 и 5% (кривые 1–6) от угла наклона сосуда (в радианах) при $A = 6000$, модель (3) представлена на рис. 1*в*.

***Работа поддержана РФФИ (грант №11-01-00483) и грантом Президента РФ МК-3582.2011.1.***

*Список литературы*

1. Нигматулин Р.И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.

2. Невский Ю.А., Осипцов А.Н. // Вестник Московского ун-та им. М.В. Ломоносова. Сер. 1 Математика, механика. 2008. №4. С. 37–40.

3.Buscall R., Goodwin J.W., Ottewill R.H., Tadros T.F. // J. Colloid Interface Sci. 1982. V. 85. P. 78–86.

## GRAVITATIONAL CONVECTION OF DISPERSE SYSTEMS IN LARGE VESSELS

***Yu.A. Nevskii***

A general hydrodynamic model of gravitational convection developing in a two-phase disperse medium due to gravity-induced sedimentation of the dispersed phase is constructed. Some limiting cases of this model, which describe gravitational convection in «large» (as compared to the particle velocity relaxation length) vessels, were investigated. Numerical modeling of these cases was performed and the inclination angles of the vessel, which correspond to the minimum time of sedimentation of the dispersed admixture, are obtained.

*Keywords:* gravity convections, particles, dispersed media mixture, particle settling, Boycott effect.