УДК 532.516

БИФУРКАЦИИ ВЫСОКИХ КОРАЗМЕРНОСТЕЙ В ЗАДАЧЕ КУЭТТА – ТЕЙЛОРА

С.Н. Овчинникова

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

ovch@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Приводятся результаты расчета точек бифуркации коразмерностей 1, 2 и 3 в задаче об устойчивости течения Куэтта между вращающимися в одну сторону цилиндрами. Эти точки интересны тем, что в их малой окрестности возможно изучать аналитически, вполне строгими методами последовательности бифуркаций, включая развитие хаотических режимов. Найдено, что при большой скорости вращения цилиндров изменяется характер нейтральных кривых, соответствующих точкам бифуркации коразмерности 1, а также появляются разнообразные пересечения двух и трех нейтральных кривых (точки бифуркации коразмерности 2 и 3).

Ключевые слова: устойчивость, резонансы, бифуркации, амплитудные уравнения, нейтральные кривые, центральное многообразие.

Начиная с работ В.И. Юдовича (1986 г.), P. Chossat и G. Iooss (1987 г.), стало возможным описывать поведение решений нелинейной системы Навье–Стокса в малой окрестности точек бифуркации высоких коразмерностей с помощью нелинейных амплитудных уравнений. Построение и анализ амплитудных систем в задаче об устойчивости течения Куэтта нужны для объяснения сложной диаграммы переходов между разнообразными течениями, наблюдаемыми в экспериментах. Вычисление точек бифуркации высоких коразмерностей является первым шагом в таких исследованиях.

Движение жидкости между соосными вращающимися цилиндрами описывается уравнениями Навье–Стокса, зависящими от безразмерных параметров: η – отношение радиусов, Ω – отношение угловых скоростей цилиндров, R – безразмерное число Рейнольдса. Предполагается, что скорость течения и давление жидкости $2\pi/\alpha$-периодичны вдоль оси цилиндров (α – заданное осевое волновое число). При всех значениях параметров существует точное стационарное вращательно-симметричное решение системы Навье–Стокса – течение Куэтта с вектором $\mathbf{v}_0$.

Критическими параметрами называются значения R, Ω, α, η, при которых линеаризованная на течении Куэтта задача

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathrm{A} - \mathrm{R}\,\mathrm{K})\mathbf{u} = \nabla q,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u}\,|_{r=1,\eta} = 0, \quad q\,|_{r=1,\eta} = 0$$

имеет ненулевое решение (нейтральную моду). В силу цилиндрической симметрии, нейтральная мода разыскивается в виде

$$\mathbf{u} = e^{i(\omega_m - m\theta - k\alpha z)}\overline{\varphi}(r), \quad q = e^{i(\omega_m - m\theta - k\alpha z)}\widetilde{q}(r),$$

где целые m и k – соответственно азимутальное и осевое квантовые числа, ω_m – вещественная частота.

Нейтральные кривые

Если цилиндры вращаются в одну сторону, то строго доказано [1] существование упорядоченной по возрастанию последовательности $\mathrm{R}_*^{(1)} < \mathrm{R}_*^{(2)} < \ldots \mathrm{R}_*^{(p)}$ критических чисел Рейнольдса $\mathrm{R}_*^{(p)}(\Omega, \alpha, \eta)$, которым отвечает монотонная потеря устойчивости ($m = 0$). Из результатов расчета следует, что такая последовательность существует для невращательно-симметричных возмущений ($m \neq 0$), причем вблизи границы ($\Omega = 1/\eta^2$) строгие неравенства нарушаются.

Различным квантовым числам m и k соответствуют трехмерные семейства критических чисел Рейнольдса $\mathrm{R}_*(\Omega, \alpha, \eta)$ в четырехмерном пространстве Π параметров задачи $(\mathrm{R}, \Omega, \alpha, \eta)$. Если в Π зафиксировать два из четырех параметров, например Ω и η, то на плоскости (R, α) находятся кривые $\mathrm{R}^{(p)} = \mathrm{R}_*^{(p)}(\Omega, \alpha, \eta)$, состоящие из критических точек (нейтральные кривые). В малой окрестности каждой точки нейтральной кривой на смену потерявшему устойчивость течению Куэтта появляется стационарный или колебательный режим, вектор скорости которого аналитически зависит от параметра надкритичности. Этот вторичный режим может быть устойчивым и неустойчивым.

При больших значениях $\Omega > 0$ нейтральные кривые перестают быть выпуклыми. Кривые, отвечающие различным по порядку критическим числам Рейнольдса, пересекаются и при дальнейшем возрастании Ω становятся замкнутыми. Если зазор между цилиндрами мал, то сначала появляются замкнутые нейтральные кривые с большими азимутальными числами m. На рис. 1 для различных m и η при $\alpha = 5.81291$ построены кривые, состоящие из точек пересечения, соответствующих двум первым по порядку критическим числам Рейнольдса.

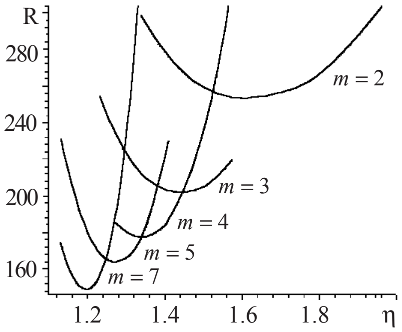

Рис. 1

Для $\eta = 1.13257$ удалось описать процесс изменения вида нейтральных кривых для $m = 7$. На рис. 2 видно, как нейтральные кривые перестают быть выпуклыми, становятся замкнутыми и, постепенно уменьшаясь, исчезают вблизи границы Synge ($\Omega = 0.77959$).

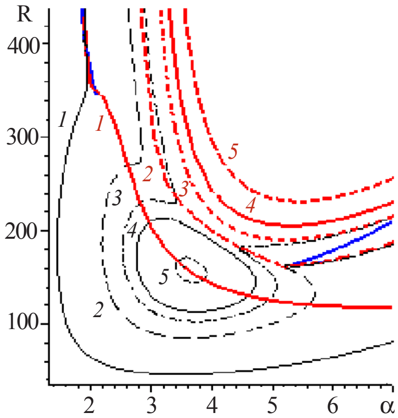

Рис. 2

Кривые $R^{(1)} = R_*^{(1)}(\alpha)$ (черные линии) и $R^{(2)} = R_*^{(2)}(\alpha)$ (красные) построены при $\Omega = 0.7$ (кривые с номером *1*), $\Omega = 0.74757$ (*2*), $\Omega = 0.753$ (*3*), $\Omega = 0.755$ (*4*), $\Omega = 0.7576$ (*5*). Синие линии состоят из точек пересечения кривых $R^{(1)} = R_*^{(1)}(\alpha)$ и $R^{(2)} = R_*^{(2)}(\alpha)$ при различных значениях Ω.

Пересечения нейтральных кривых

Нейтральные кривые, отвечающие различным значениям квантовых чисел $(m.k)$ и $(n.l)$, пересекаются, и в каждой точке пересечения существует несколько независимых нейтральных мод. Когда параметры системы изменяются в малой окрестности таких точек, становится возможным сильное взаимодействие этих (точнее, слегка измененных) мод, которое описывается нелинейной системой амплитудных уравнений на центральном многообразии. Эти амплитудные системы выведены с помощью осреднения по быстрому времени. Если в точке бифуркации коразмерности 2 выполняются некоторые резонансные соотношения между параметрами, то у амплитудной системы появляются дополнительные резонансные слагаемые.

Вычисление точек пересечения нейтральных кривых, расчет коэффициентов амплитудных уравнений позволил провести конкретный анализ возможных режимов движения жидкости вблизи течения Куэтта [2, 3]. В случае вращения цилиндров в противоположные стороны существует семь типов амплитудных систем [4].

Проведенный анализ показал, что при вращении цилиндров в одну сторону существуют три типа амплитудных систем. Вычислены точки пересечения двух нейтральных кривых для каждого из трех типов амплитудных систем при $\eta = 1.13257$.

Найдены несколько точек пересечения трех нейтральных кривых. Так, пересекаются две нейтральные кривые, которые соответствуют двум первым по порядку критическим числам Рейнольдса при $m = n = 6$ и $k = l = 1$, и кривая, отвечающая квантовым числам $m_1 = 2$ и $k_1 = 1$. В остальных точках азимутальные и осевые квантовые числа различны.

Исследование таких систем только начато и классификацию типов амплитудных систем в точках бифуркации коразмерности 3 предстоит построить.

Список литературы

1. Юдович В.И. // ПММ. 1966. Т. 30, вып. 4. С. 688–698.

2. Моршнева И.В., Овчинникова С.Н. // Изв. РАН. МЖГ. 2009. №6. С. 21–31.

3. Моршнева И.В., Овчинникова С.Н. // ПМТФ. 2010. Т. 51, №6. С. 55–62.

4. Yudovich V.I., Ovchinnikova S.N. // J. Math. Fluid Mech. 2009. Vol. 11. P. 469–491.

BIFURCATIONS OF HIGHER CO-DIMENSIONS IN THE COUETTE – TAYLOR PROBLEM

S.N. Ovchinnikova

Results of calculation of bifurcation points of co-dimensions 1, 2, 3 in the Couette flow between concentric co-rotational cylinders are presented. In the near vicinity of these points, one can investigate analytically the sequence of bifurcations leading to chaotic regimes. The form of neutral curves of co-dimension-1 changes for high angular velocities of the cylinders, and various intersections of 2 and 3 neutral curves (bifurcation points of co-dimensions 2 and 3) appear.

Keywords: stability, resonances, bifurcation, amplitude equations, neutral curves, central manifold.