Механика жидкости и газа
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (3), с. 1022–1023

УДК 532.517

НОВАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ КАРМАНОВСКОГО ТИПА

В.А. Орлов, К.В. Кулагина

Ульяновский госуниверситет

puankare1@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Предлагается метод замыканий второго порядка, основанный на представлении плотности спектрального переноса энергии в виде разности двух антисимметричных к перестановке аргументов функций, при этом снимаются основные противоречия предшествующих моделей кармановского типа, а уравнение спектрального энергобаланса однородной затухающей турбулентности принимает вид уравнения Колмогорова – Феллера, свойства которого используются в построении модели.

Ключевые слова: мелкомасштабная турбулентность, модели второго порядка, энергетический спектр.

Гипотезы типа Кармана

Последней работой, связанной с построением замыканий уравнения спектрального энергобаланса однородной затухающей турбулентности [1]

$$\frac{\partial F(k)}{\partial t} = \int Q(k,q)dq - 2\nu k^2 F(k)$$

вида

$$\oiint\oiint Q(k,q)dS(k)dS(q) = H(k,q) - H(q,k),$$

$$H(k,q) = 2h\varepsilon^g k^a [E(k)]^b q^c [E(q)]^d \psi(k,q),$$

где $\varepsilon = 2\nu\int k^2 F(k)dk$; $\psi(k, q)$ – некая числовая функция; h, g, a, b, c, d – числовые параметры, к которым можно отнести модели Гейзенберга (1948), Кармана (1948), Дугстада (1962), Крейчнана и Спигела (1968), по-видимому, является обзорно-аналитическая статья А.М. Яглома 1967 года [2]. К причинам прекращения развития данной генерации гипотез можно отнести необходимость введения и неоднозначность «обрезающего множителя» $\psi(k, q)$, а также невыполнение требования Бэтчелора [3] о зависимости плотности спектрального энергопереноса $Q(k, q)$ от характеристик возмущений поля скорости $\mathbf{v}(x,t) = \mathbf{V}(x,t) - \langle \mathbf{V}(x,t) \rangle$ с волновым вектором $k - q$.

Устранение недостатков

Данные недостатки отсутствуют в выражении плотности спектрального энергопереноса $Q(k, q)$ через энергетический спектр $F(k)$, k и среднюю скорость диссипации энергии ε [4]:

$$Q(k,q) = G(k,q) - G(q,k),$$

$$G(k,q) = 2\gamma\varepsilon^{(1-2l)/3} |q|^{2/3+\alpha} \times$$

$$\times |k-q|^{11/3l-3-\alpha} [F(k-q)]^l F(q).$$

Учитывая, что множитель γ выражается через скейлинговые показатели l, α и константу Колмогорова C_k, $\gamma = 4(4\pi)^{l-2} C_к^{-1-l} \alpha(1-\alpha^2)\mathrm{tg}(\pi\alpha/2)$, $0 < \alpha < 2$, параметрами предлагаемой модели можно считать два числа: показатель нелинейности l и фрактальную размерность спектральной плотности нетепловой диссипации $\int G(q,k)dq$ на инерционном интервале α.

При использовании предельных свойств оператора Эйнштейна – Смолуховского [5], представленного функцией переноса $\int G(q,k)dq$, получено уравнение для мелкомасштабной асимптотики энергетического спектра $F(k)$:

$$\gamma\varepsilon^{(1-2l)/3} \int k^{11/3l-1-\alpha} [F(k)]^l dk \frac{d^2}{dk^2}[k^{5/3+\alpha} F(k)] =$$

$$= 2\nu k^3 F(k).$$

Уже для наиболее простого ($l = 1$, $\alpha = 2/3$) его решения [6] обнаруживается согласие с экспериментальными данными Стюарта и Таунсенда [3], что говорит в пользу адекватности части представленного семейства моделей развитой турбулентности на всем интервале «мелких» масштабов.

Обращается внимание на возможность обобщения рассматриваемой функциональной зависимости между $Q(k, q)$ и $F(k)$ на случаи неколмогоровского скейлинга и ее формулировки при $l = 1$ в терминах корреляционных функций:

$$\langle \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_r \rangle = 2\int F(k)e^{ikr}dk, \quad \langle (\mathbf{v} \cdot \nabla_r)\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_r \rangle =$$

$$= \iint Q(k,q)e^{ikr}\,dqdk, \quad \mathbf{v}_r \equiv \mathbf{v}(x+r),$$

$$\left\langle (\mathbf{v}\cdot\nabla_r)\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_r \right\rangle = \frac{\gamma}{2}\varepsilon^{-1/3}\left\{(-\Delta)^{1/3-\alpha/2}\left\langle \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_r\right\rangle -\right.$$

$$\left. -\left[(-\Delta)^{1/3-\alpha/2}\left\langle \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_r\right\rangle\right]_{r=0}\right\}(-\Delta)^{1/3-\alpha/2}\left\langle \mathbf{v}\cdot\mathbf{v}_r\right\rangle,$$

обогащающей разнообразие подобных гипотез применением трехмерных интегродифференциальных операторов Рисса $(-\Delta)^t$ [5].

Список литературы

1. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965; Ч. 2. М.: Наука, 1967.

2. Яглом А.М. // Проблемы гидродинамики и механики сплошных сред: Сб., посвященный 60-летию Л.И. Седова. М.: Наука, 1967.

3. Бэтчелор Дж.К. Теория однородной турбулентности. М.: ИЛ, 1955.

4. Кулагина К.В., Орлов В.А. Об описании спектрального переноса турбулентной энергии уравнением типа свертки // 17 Зимняя школа – Конференция ИМСС УрО РАН. Пермь, 2011.

5. Учайкин В.В. Метод дробных производных. Ульяновск: Артишок, 2008.

6. Орлов В.А., Широков А.В., Зиновьев Д.А. О микровозмущениях поля скорости гидропотока // Опто-, наноэлектроника, нанотехнологии и микросистемы: Тр. XI Межд. конф. Ульяновск: УлГУ, 2009. С. 394–396.

A NEW SPECTRAL MODEL OF KARMAN-TYPE TURBULENCE

V.A. Orlov, Ch.V. Kulagina

A method of second-order closure is presented that is based on the representation of the density of the spectral energy transfer as a difference of two function arguments anti-symmetric to the interchange, thus removeing the major contradictions of the previous models of von Karman type, and the spectral energy balance equation takes the form of the Kolmogorov–Feller, its properties being used in constructing the model.

Keywords: small-scale turbulence, second order models, the energy spectrum.