УДК 532.529

ЛАГРАНЖЕВ ПОДХОД В МЕХАНИКЕ ДИСПЕРСНЫХ СРЕД: ПРЕИМУЩЕСТВА И ПЕРСПЕКТИВЫ

А.Н. Осипцов

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

osiptsov@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Обсуждается полный лагранжев подход для расчета полей скорости и плотности в континуальных моделях сред, лишенных собственных напряжений, обычно используемых для описания дисперсной фазы в разреженных дисперсных системах. Суть метода состоит в использовании лагранжевой формы уравнений импульса и неразрывности дисперсной фазы и привлечении дополнительных уравнений для компонент якобиана перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным. Метод позволяет вычислять плотность дисперсной фазы вдоль выбранных траекторий частиц из решения систем обыкновенных дифференциальных уравнений, что делает возможным исследование поведения дисперсной примеси в существенно неодномерных и нестационарных течениях с разрывами сплошности, множественными пересечениями траекторий частиц и локальными зонами накопления дисперсной фазы. Даны примеры применения метода к задачам двухфазной газодинамики, в которых возникают «складки» в среде частиц, каустики, локализованные области накопления частиц и интегрируемые особенности в поле плотности дисперсной фазы. Обсуждаются возможности применения аналогичных лагранжевых подходов для моделирования эволюции других механических объектов (деформируемых материальных объемов и поверхностей в движущихся средах, бесстолкновительных систем частиц, описываемых кинетическими уравнениями, дифференциальных характеристик полей пассивных скаляров, градиентов плотности в стратифицированных течениях и др.).

Ключевые слова: полный лагранжев подход, частицы, «складки», сингулярности плотности, среда без давления, пересечение траекторий.

При двухконтинуальном моделировании течений аэрозолей, запыленных газов, разреженных суспензий и пузырьковых жидкостей, как правило, пренебрегается столкновениями и флуктуационными скоростями включений, и дисперсная фаза моделируется континуумом, лишенным собственных напряжений. В таком континууме возможно возникновение разрывов сплошности, зон пересекающихся траекторий включений, т.е. «сборок» и «складок», на границах которых числовая плотность включений неограниченно (но, как правило, интегрируемым образом) возрастает. Микроструктурный анализ показывает, что для малых объемных концентраций включений решения с сингулярным поведением плотности среды имеют физический смысл, поскольку, несмотря на неограниченный рост числовой плотности, среднее расстояние между частицами по-прежнему заметно превосходит размер включений.

Представлен развитый в лаборатории механики многофазных сред НИИ механики МГУ оригинальный полный лагранжев подход для исследования полей скорости и плотности дисперсной фазы в течениях разреженных дисперсных сред.

Основные идеи полного лагранжева подхода [1]

Проиллюстрируем идеи развиваемого подхода на простейшей модели разреженной дисперсной смеси, несущая фаза которой описывается уравнениями Навье – Стокса (или Эйлера) с источниковыми членами, отвечающими за межфазный обмен импульсом, а дисперсная фаза, состоящая из одинаковых недеформируемых включений, описывается моделью континуума без собственных напряжений. В криволинейных ортогональных координатах ξ_i уравнения неразрывности, траекторий и импульса среды частиц принимают вид (здесь H_i – коэффициенты Ламе, v_{si} и n_s – физические компоненты скорости и числовая концентрация частиц, ξ_{i0} – лагранжевы координаты, в качестве которых используются значения эйлеровых координат в начальный момент времени, t – время движения частицы по траектории):

$$n_s(\xi_{10},\xi_{20},\xi_{30},t)H_1H_2H_3\det\|J_{ij}\| =$$
$$= n_{s0}(\xi_{10},\xi_{20},\xi_{30},0)H_{10}H_{20}H_{30},$$
$$J_{ij} = \partial\xi_i / \partial\xi_{i0},$$

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = \frac{v_{si}}{H_i},$$

$$\frac{\partial v_s}{\partial t} = \sum_k \frac{v_{sk}}{H_i H_k}\left(v_{sk}\frac{\partial H_k}{\partial \xi_i} - v_{si}\frac{\partial H_i}{\partial \xi_k}\right) + f_{si}.$$

Уравнения для вычисления компонент перехода от эйлеровых к лагранжевым переменным J_{ij} выводятся путем дифференцирования данных уравнений по лагранжевым координатам:

$$\frac{\partial J_{ij}}{\partial t} = \frac{\Omega_{ij}}{H_i} - \frac{v_i}{H_i^2}\sum_k \frac{\partial H_j}{\partial \xi_k} J_{kj}, \quad \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial t} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial \xi_{j0}}\left\{\sum_k \frac{v_{sk}}{H_i H_k}\left(v_{sk}\frac{\partial H_k}{\partial \xi_i} - v_{si}\frac{\partial H_i}{\partial \xi_k}\right)\right\} + \frac{\partial f_{si}}{\partial \xi_{j0}}.$$

Здесь $\Omega_{ij} = \partial v_{si} / \partial \xi_{j0}$. При рассчитанных полях параметров несущей фазы для заданной модели силового взаимодействия фаз (f_{si} – известные функции параметров несущей фазы и скоростей частиц) и фиксированной системы координат (H_i – известные функции координат), дифференцирование выражения в фигурных скобках и f_{si} по лагранжевым координатам следует проводить по правилам дифференцирования сложных функций. Полученные в результате уравнения при $\xi_{i0} = \mathrm{const}$ превращаются в замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений для ξ_i, v_{si}, J_{ij}, Ω_{ij} и конечного соотношения для n_s, позволяющих рассчитывать концентрацию одновременно с расчетом траектории частиц.

Примеры использования метода

Приводятся примеры успешного применения метода для расчета течений с пересекающимися траекториями частиц. Среди рассмотренных примеров подъем пыли за движущейся ударной волной [2] (рис. 1*а*, где обозначено: *1* – граница пограничного слоя, *2* – траектории частиц в системе отсчета, связанной с фронтом волны), фокусировка частиц за точкой пересечения ударных волн [3] (рис. 1*б*), образование чашеобразной области накопления примеси в течении типа торнадо [4], фокусировка частиц за движущейся ударной волной в микроканале при поперечной миграции частиц, обусловленной силой Сэфмана [5] (рис. 1*в*) и др.

Обсуждаются возможности обобщения метода на случай конечной объемной концентрации частиц, кинетического описания бесстолкновительных систем частиц, расчетов эволюции материальных поверхностей и линий в гидродинамических потоках, нахождения полей концентрации пассивной безынерционной примеси, а также расчета полей градиентов плотности в стратифицированных потоках с малой диффузией.

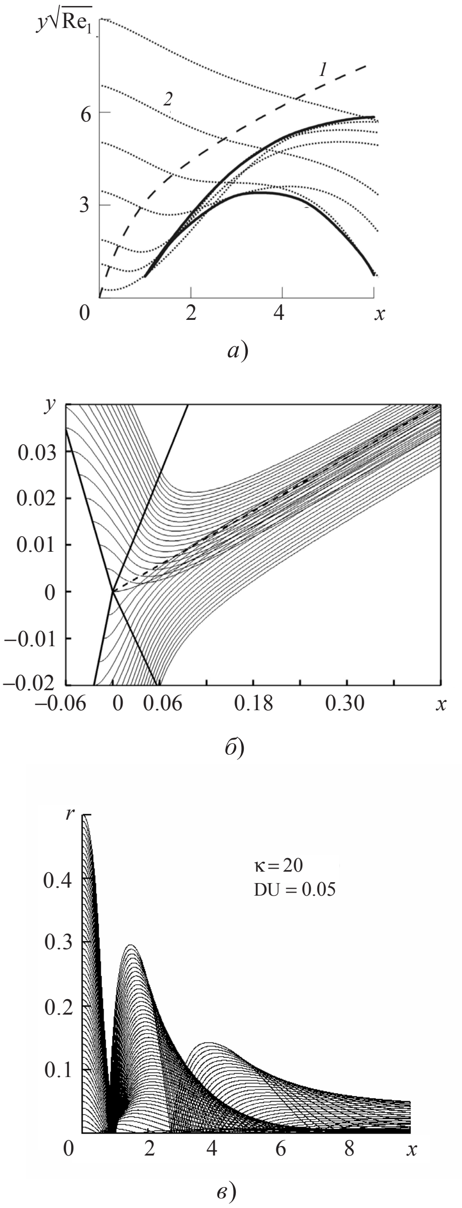

Рис. 1

Заключение

Предложенный метод является удобным инструментом для численного исследования течений дисперсных сред с пересечениями траекторий частиц и локальными зонами аккумуляции дисперсной фазы. Он позволяет рассчитывать как стационарные, так и нестационарные течения без изменения алгоритма.

Главные достоинства метода – его простота и экономичность, обусловленная возможностью построения полей концентрации частиц в сложных неодномерных и нестационарных потоках на основе расчета небольшого числа траекторий. Идея метода применима к расчетам динамики различных механических объектов, описываемых моделями сред без давления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект №11-01-00483) и Аналитической ведомственной программы «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект 2.1.1/1399).

Список литературы

1. Osiptsov A.N. Lagrangian modeling of dust admixture in gas flows // Astrophys. Space Sci. 2000. V. 274. P. 377–386.

2. Ван Бо-И, Осипцов А.Н. Пристеночный пограничный слой за ударной волной в запыленном газе // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1999. №4.

3. Голубкина И.В., Осипцов А.Н. Аэродинамическая фокусировка инерционных частиц в области пересечения ударных волн // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2007. №6. С. 86–100.

4. Лебедева Н.А., Осипцов А.Н. Структура зон аккумуляции дисперсной примеси в течении типа торнадо // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2008. №5. С. 75–87.

5. Осипцов А.Н., Рыбдылова О.Д. Эффект фокусировки аэрозольных частиц за ударной волной, движущейся в микроканале // Докл. РАН. 2010. Т. 55, №7. С. 346–349.

LAGRANGIAN APPROACH IN THE MECHANICS OF DISPERSED MEDIA: ADVANTAGES AND PROSPECTS

A.N. Osiptsov

We discuss the full Lagrangian approach for calculating the velocity and density fields in a medium without self-stresses, which is usually used to describe the dispersed phase in dilute disperse systems. The method consists in using the Lagrangian form of the momentum and continuity equations for the dispersed phase and deriving additional equations for the components of the Jacobian of transformation from the Eulerian to Lagrangian variables. The method allows to calculate the dispersed-phase density along individual particle trajectories from the solution of systems of ordinary differential equations. This makes it possible to study the behavior of dispersed particles in an essentially multidimensional and unsteady flows with discontinuities, multiple intersections of particle trajectories, and local particle accumulation zones. Examples are given of applying the method to problems in two-phase gas dynamics, in which «folds» in the dispersed-phase medium, caustics, localized regions of accumulation of the particles, and integrable singularities in the particle density arise. We also discuss the possibility of applying a similar Lagrangian approach for modeling the evolution of other mechanical objects (deformable material volumes and surfaces in moving media, collisionless particle systems described by kinetic equations, differential characteristics of passive-scalar fields, density gradients in stratified flows, etc.).

Keywords: full Lagrangian approach, particles, «folds», density singularities, pressureless medium, intersection of the trajectories.