УДК 532.546

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧ ДВУХМЕРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНО-НЕОДНОРОДНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

В.Ф. Пивень

Орловский госуниверситет

oryol@au.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Ставятся и решаются фундаментальные граничные задачи стационарной двухмерной фильтрации в анизотропном и неоднородном слое пористой среды (пласте грунта): первая и вторая краевые задачи и задача сопряжения. Предлагается метод решения этих задач. Если анизотропный слой однороден и границы канонические (прямая, эллипс), решения задач можно получить в конечном виде. В общем случае используется обобщенный интеграл типа Коши. Это позволяет редуцировать задачи к решению сингулярных интегральных уравнений на границах.

Ключевые слова: фильтрация, анизотропная неоднородная среда, граничные задачи, обобщенный интеграл типа Коши.

1. Двухмерную стационарную фильтрацию несжимаемой жидкости в недеформируемом тонком слое пористой среды (пласте грунта) с тензором проводимости $P = (P_{ij}) = H(K_{ij})$ ((K_{ij}), $i, j = 1, 2$, – тензор проницаемости слоя, H – его толщина) описываем обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ – функциями декартовых координат точки $M = (x, y)$ плоскости основания слоя. Они удовлетворяют в области D (за исключением изолированных особых точек этих функций, моделирующих произвольные источники (стоки) течения) известной эллиптической системе уравнений [1]:

$$P_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$P_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + P_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}. \qquad (1.1)$$

Здесь $P_{11} > 0$, $D(P_s) = P_{11}P_{22} - (P_{12} + P_{21})^2/4 > 0$, $D(P_s)$ – определитель симметричной части $P_s = (P + P^T)/2$ тензора $P = (P_{ij})$, $P^T = (P_{ij})$ – транспонированный тензор.

Из системы (1.1) следует для φ уравнение эллиптического типа в дивергентной форме

$$\nabla \cdot (P \cdot \nabla\varphi) = 0 \quad \left(\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}\right). \qquad (1.2)$$

Границы области D и раздела слоя разных проводимостей моделируем простыми (без самопересечений) гладкими или кусочно-гладкими линиями (замкнутыми или разомкнутыми).

Первая краевая задача: найти решение уравнения (1.2) с условием на границе σ_1 ($f(M)$ – заданная функция):

$$\varphi^+(M) = f(M), \quad M \in \sigma_1. \qquad (1.3)$$

Вторая краевая задача: найти решение уравнения (1.2) с условием на границе σ_2:

$$\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_2, \qquad (1.4)$$

производная берется по конормали к границе σ_2.

Задача сопряжения: найти решение уравнения (1.2), удовлетворяющего на границе Γ раздела областей D_1 и D_2 ($D_1 \cup D_2 = D$) слоя, проводимости в которых P_1 и P_2 ($P_\alpha = k_\alpha P$, k_α – постоянные, $\alpha = 1, 2$), условиям сопряжения

$$\varphi^+(M) = \varphi^-(M), \qquad (1.5)$$

$$k_1\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = k_2\left(\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^-, \quad M \in \Gamma.$$

Если область D ограничена сингулярной линией $\sigma_0 = \sigma_{01} \cup \sigma_{02}$ и содержит бесконечно удаленную точку, то функция $\varphi(M)$, помимо условий (1.3)–(1.5), должна удовлетворять также условиям [4]:

$$\varphi^+(M) = 0, \quad M \in \sigma_{01};$$

$$\left(P_n(M)\frac{\partial\varphi(M)}{\partial\nu_M}\right)^+ = 0, \quad M \in \sigma_{02}, \qquad (1.6)$$

$$\varphi(M) = O(r_{MM_0}^{-1}), \qquad (1.7)$$

$$\left|P(M)\cdot\nabla\varphi(M)\right| = O(r_{MM_0}^{-2}) \quad \text{при} \quad r_{MM_0} \to \infty.$$

2. Ведем две комплексные плоскости: физическую плоскость $z = x + iy$, где течение в области D описывают функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, и вспомогательную плоскость $\zeta = \xi + i\eta$, где течение в области D' характеризуется функциями $\varphi(\zeta)$ и $\psi(\zeta)$. Плоскости z и ζ, области D и D' взаимосвязаны гомеоморфным (взаимно однозначным и непрерывным) преобразованием $\zeta = \zeta(z)$, которое удовлетворяет уравнению Бельтрами ($D(K_s)$ – определитель симметричной части тензора K, $D(K_s) = \; = D(P_s)/H^2$)

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\bar{z}} - \mu(z)\frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0 \qquad (2.1)$$

$$\left(\mu(z) = \frac{K_{22} - K_{11} - i(K_{12} + K_{21})}{K_{22} + K_{11} + 2\sqrt{D(K_s)}}, \quad |\mu(z)| < 1\right).$$

Введем в плоскости ζ комплексный потенциал $W = \varphi + i\psi / P'$, ($P' = \sqrt{D(P_s)} - i\sqrt{D(P_a)}$), где P' – проводимость слоя в плоскости ζ, $D(P_a)$ – определитель антисимметричной части $P_a = (P - - P^T)/2$ тензора P. Функция $W(\zeta)$ удовлетворяет всюду в области D' (за исключением ее изолированных особых точек) вытекающему из системы (1.1) при учете (2.1) уравнению

$$\frac{\partial W}{\partial\bar{\zeta}} + A(W - \overline{W}) = 0 \quad \left(A = \frac{P'}{P' + \overline{P'}}\frac{\partial \ln P'}{\partial\bar{\zeta}}\right). \qquad (2.2)$$

Искомый комплексный потенциал $W(\zeta)$ для первой и второй краевых задач представим в виде $W(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta)$, $\zeta \in D'$. Здесь $W_0(\zeta)$ – комплексный потенциал имеет заданные изолированные особые точки в отсутствие границ σ_1, σ_2 и, возможно, σ_0; $W_*(\zeta)$ – комплексный потенциал возмущений, учитывающий эти границы.

В случае задачи сопряжения течение в областях D_1 и D_2 описывают комплексные потенциалы W_1 и W_2 ($W_\alpha = k_\alpha\varphi_\alpha + i\psi_\alpha/P'$), которые запишем в виде $W_\alpha(\zeta) = W_0(\zeta) + W_*(\zeta)$, $\zeta \in D'_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Далее, поставленные выше задачи (условия (1.3)–(1.7)) формулируются для $W_*(\zeta)$. По найденному $W_*(\zeta)$ с использованием гомеоморфизма $\zeta = \zeta(z)$ находим решения задач в виде $W(z) = W[\zeta(z)]$ и $W_\alpha(z) = = W_\alpha[\zeta(z)]$, $\alpha = 1, 2$.

3. В частности, когда анизотропный слой однороден (компоненты тензора $P = (P_{ij})$ постоянные) и границы σ_1, σ_2 и Γ – канонические (прямая, эллипс), решения задач получаются в конечном виде [2]. В общем случае комплексный потенциал $W_*(\zeta)$ представляем обобщенным интегралом типа Коши (функция $f(\tau)$ непрерывна на кривой $L' \in D'$):

$$W_*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau) f(\tau) d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)\bar{f}(\tau) d\bar{\tau}, \quad \zeta \notin L'; \qquad (3.1)$$

$\Omega_1(\zeta,\tau)$ и $\Omega_2(\zeta,\tau)$ – ядра, которые, в отличие от [3], выражаются в [4] через фундаментальные решения уравнения (2.2). Если $f(\tau)$ – функция класса Гёльдера, то имеем предельные значения

$$W_*^{\pm}(\zeta) = \qquad (3.2)$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \Omega_1(\zeta,\tau) f(\tau) d\tau - \Omega_2(\zeta,\tau)\bar{f}(\tau) d\bar{\tau} \pm \frac{f(\zeta)}{2}, \quad \zeta \in L',$$

где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Используя формулы (3.1), (3.2), из граничных условий для $W_*(\zeta)$ получим относительно искомой функции $f(\tau)$ сингулярные интегральные уравнения на границах σ'_1, σ'_2 и Γ', которые являются образами границ σ_1, σ_2 и Γ. При этом условия на сингулярной границе σ'_0 (σ'_0 – образ границы σ_0) и в бесконечности учитываются фундаментальными решениями.

Таким образом, поставленные задачи редуцируются к решению найденных в работе [4] интегральных уравнений. Решения поставленных задач применено в [5] к нахождению дебита системы скважин в анизотропном пласте грунта.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-97509).

Список литературы

1. Радыгин В.М., Голубева О.В. Применение функций комплексного переменного в задачах физики и техники. М.: Высшая школа, 1983. 160 с.

2. Пивень В.Ф. Исследование граничных задач плоскопараллельных течений в анизотропной пористой среде // Дифференциальные уравнения. 2009. Т. 45, №9. С. 1286–1297.

3. Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988. 512 с.

4. Пивень В.Ф. Метод обобщенного интеграла типа Коши для двумерных задач фильтрации в анизотропно-неоднородном слое пористой среды // Труды Межд. школ-семинаров «МДОЗМФ», Орел. 2010. Вып. 8. С. 81–88.

5. Пивень В.Ф. Задача о работе системы скважин в анизотропном пласте грунта // Труды XIV Межд. симпозиума «МДОЗМФ». Харьков–Херсон. 2009. С. 394–397.

THE ANALYSIS OF BOUNDARY PROBLEMS OF TWO-DIMENSIONAL FILTERING IN AN ANISOTROPIC INHOMOGENEOUS LAYER OF A POROUS MEDIUMX

V.F. Piven

Fundamental boundary problems of two-dimensional stationary filtration in an anisotropic and inhomogeneous layer of a porous medium (soil formation) – the first and second boundary value problem and the problem of coupling- are formulated and analyzed. A method for solving these problems is proposed. If the anisotropic layer is homogeneous with canonical boundaries (line, ellipse), solutions of the problems have a closed form. In a general case, generalized Cauchy type integral is used. This allows us to reduce the problem to the solution of singular integral equations on the boundaries.

Keywords: filtering, anisotropic inhomogeneous medium, the boundary problem, the generalized Cauchy type integral.