УДК 517.95

УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКАМИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ НАЛИЧИИ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ И ТЕПЛОВЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ НА ГРАНИЦЕ

Р.В. Бризицкий, Г.В. Алексеев, Д.А. Терешко

Институт прикладной математики ДВО РАН, Владивосток

alekseev@iam.dvo.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Сформулированы двухпараметрические экстремальные задачи граничного управления для стационарных уравнений тепловой конвекции, рассматриваемых при граничных условиях Дирихле для скорости и смешанных краевых условиях для температуры. Обсуждаются результаты вычислительных экспериментов по минимизации нормы завихренности потока для уменьшения силы сопротивления, действующей на тело со стороны вязкой жидкости. Роль управлений играют граничный вектор скорости и поток тепла на отдельных участках границы.

Ключевые слова: вязкая жидкость, тепловая конвекция, задачи управления, вычислительные эксперименты.

Постановка задачи

Исследуются задачи граничного управления для математической модели переноса тепла в вязкой жидкости в рамках приближения Обербека – Буссинеска. Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbf{R}^m$ ($m = 2, 3$) с липшицевой границей Γ, состоящей из двух частей Γ_D и Γ_N. Рассмотрим краевую задачу для стационарных уравнений Обербека – Буссинеска:

$$-\nu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p=-\beta T\mathbf{G}, \quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \text{ в } \Omega, \quad (1)$$

$$-\lambda\Delta T+\mathbf{u}\cdot\nabla T=f \text{ в } \Omega, \quad (2)$$

$$\mathbf{u}=\mathbf{g} \text{ на } \Gamma, \quad T=\psi \text{ на } \Gamma_D, \quad \lambda\partial T/\partial n=\chi \text{ на } \Gamma_N, \quad (3)$$

описывающую стационарное течение вязкой теплопроводной жидкости в области Ω. Здесь $\mathbf{u}$, p и T – вектор скорости, давление и температура; ν – коэффициент кинематической вязкости; $\mathbf{G}$ – вектор ускорения свободного падения; β – коэффициент объемного теплового расширения; λ – коэффициент температуропроводности; $\mathbf{g}$, ψ, χ – некоторые функции на соответствующих участках границы Γ.

Указанные выше задачи граничного управления для данной математической модели формулируются как задачи условной минимизации функционалов качества, зависящих как от слабых решений исходной краевой задачи, так и управлений:

$$J(\mathbf{u},p,T,\mathbf{g},\chi)=I(\mathbf{u},p,T)+\frac{\mu_1}{2}\|\mathbf{g}\|^2_{1/2,\Gamma}+$$

$$+\frac{\mu_2}{2}\|\chi\|^2_{\Gamma_N}\to\inf, \quad F(\mathbf{u},p,T,\mathbf{g},\chi)=0.$$

Здесь μ_1, μ_2 – положительные константы, $F(\mathbf{u}, p, T, \mathbf{g}, \chi) = 0$ – нелинейное операторное уравнение, соответствующее слабой формулировке краевой задачи (1)–(3). Роль управлений играют неизвестные значения вектора скорости $\mathbf{g}$ на Γ и потока тепла χ на Γ_N.

На основе методов работ [1–3] выводится система оптимальности, описывающая необходимые условия минимума. Система оптимальности состоит из трех частей. Первая ее часть представляет собой краевую задачу для вектора скорости, давления и температуры. Роль второй части играет сопряженная задача для сопряженной скорости, сопряженного давления и сопряженной температуры. Третьей частью является равенство, связывающее между собой управления, входящие в первую часть, и сопряженное состояние из второй части системы оптимальности. Разрабатывается алгоритм численного решения задачи граничного управления, основанный на методе Ньютона решения нелинейной системы оптимальности.

Результаты вычислительных экспериментов

Обсудим результаты вычислительных экспериментов по численному решению задачи обтекания кругового цилиндра плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости в плоском канале с внезапным расширением. На рис. 1 представлены линии тока течения, полученного путем решения двумерной краевой задачи для стационарных уравнений Навье – Стокса при числе

Рейнольдса Re = 50. Граничные условия для данного случая отвечают заданию параболического профиля для скорости на участке втекания слева, условий прилипания на жестких границах (поверхности цилиндра и боковых стенках канала) и «естественного» краевого условия на участке вытекания справа. Нелинейные уравнения Навье – Стокса решались с помощью метода Ньютона. Для численного решения линеаризованной краевой задачи методом конечных элементов на адаптивной треугольной сетке использовался свободно распространяемый пакет freeFEM++ (www.freefem.org). В качестве начального приближения было выбрано решение соответствующей задачи Стокса, причем для сходимости метода Ньютона обычно требовалось не более пяти итерации.

Из рис. 1 видно, что за обтекаемым телом образуется разделение потока, в углах появились вихри. Чтобы уменьшить отрывную зону за телом и размер вихревых зон в углах, решается задача минимизации квадрата нормы завихренности для безразмерных уравнений Обербека – Буссинеска, рассматриваемых при тех же граничных условиях для скорости и смешанных краевых условий для температуры. При этом использовался разработанный авторами алгоритм, основанный на решении нелинейной системы оптимальности методом Ньютона.

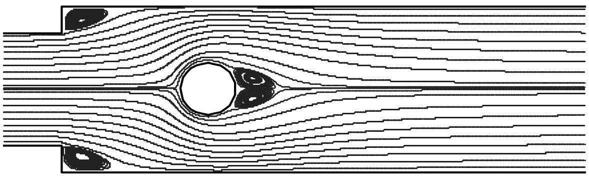

Рис. 1

Была рассмотрена схема управления, в которой температурное управление на границе тела и на близлежащих участках стенок канала использовалось для создания безотрывного режима обтекания, тогда как в углах используется гидродинамическое управление. Полученные линии тока течения представлены на рис. 2.

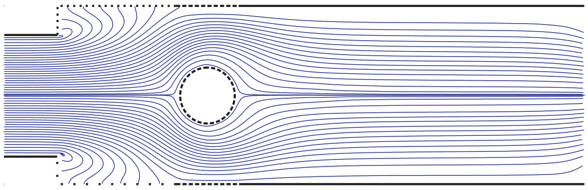

Рис. 2

Хорошо видно, что застойные зоны в углах исчезли благодаря режиму вытекания (или отсоса жидкости) вблизи углов, полученному в результате решения двухпараметрической задачи управлении.

Отметим, что при проведении численных расчетов важную роль играют параметры регуляризации μ_1 и μ_2. Если эти параметры недостаточно малы, то в процессе решения задачи минимизации не удается получить течение с заданными свойствами. В случае однопараметрической задачи, когда роль управления играет тепловой поток, а значение параметра регуляризации чрезмерно мало, в результате численного решения возникают большие температурные градиенты в окрестности участков управления. Одновременное использование двух управлений разной физической природы позволяет избежать этих проблем. Если основное изменение поля скорости достигается за счет гидродинамического управления, то температурное управление будет играть только вспомогательную роль и температурные градиенты будут малы.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 10-01-00219-а) и ДВО РАН (проекты 09-I-П29-01, 09-I-ОМН-03, 09-II-СУ03-003 и 09-III-А-03-07).

Список литературы

1. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. Анализ и оптимизация в гидродинамике вязкой жидкости. Владивосток: Дальнаука, 2008. 365 с.
2. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. // Докл. РАН. 2010. Т. 430, №2. С. 173–178.
3. Алексеев Г.В., Терешко Д.А. // Прикл. мех. и техн. физ. 2010. Т. 51, №4. С. 72–84.

FLOW CONTROL OF VISCOUS FLUID IN THE PRESENCE OF HYDRODYNAMIC AND THERMAL EFFECTS ON THE BOUNDARY

R.V. Brizitskii, G.V. Alekseev, D.A. Tereshko

Two-parameter extremum boundary control problems for stationary equations of heat convection under Dirichlet boundary conditions for the velocity and mixed boundary conditions for the temperature are formulated. The results of computational experiments for minimizing the norm of the vorticity to reduce the drag force acting on the body are discussed. Velocity vector and heat flux on some parts of the boundary are the controls.

Keywords: viscous fluid, heat convection, control problems, computational experiments.