

УДК 533+532+517.9

**ФОРМУЛЫ ДЛЯ «РАЗМНОЖЕНИЯ» ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА И УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА**

У 2011 г.

*А.Д. Полянин*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва

polyanin@ipmnet.ru

*Поступила в редакцию 16.05.2011*

Приведены формулы, позволяющие строить новые точные решения уравнений Навье – Стокса и уравнений Эйлера, исходя из известных более простых точных решений. Рассмотрен ряд примеров построения таких решений трехмерных уравнений Навье–Стокса. Полученные результаты используются для решения некоторых задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости.

*Ключевые слова:* уравнения Навье–Стокса, уравнения Эйлера, точные решения, новые формулы.

**Предварительные замечания**

В работах [1–4] были приведены примеры построения новых точных решений трехмерных уравнений Навье–Стокса, исходя из других более простых решений. В частности, было показано, что несколько классов точных решений трехмерных уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости жидкости от двух пространственных переменных сводятся к системе двух уравнений, одно из которых является изолированным нелинейным уравнением для третьей компоненты скорости жидкости  $w$ , а второе уравнение для вспомогательной функции  $G$  зависит от  $w$  и линейно относительно  $G$  (и имеет тривиальное решение  $G = 0$ ). Были описаны семейства точных решений, в которых функция  $G$  представляется в виде линейной комбинации производных от  $w$  по пространственной координате  $z$  следующего вида:

$$G = a(t) + b(t)w_z + c(t)w_{zz}, \quad (1)$$

где функции  $a(t)$ ,  $b(t)$ ,  $c(t)$  зависят от времени  $t$  и описываются линейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, решения которых содержат три свободных параметра (константы интегрирования). Формула (1) позволяет по любому точному решению нелинейного уравнения для функции  $w$  автоматически строить точные решения для функции  $G$ , что приводит к новым точным решениям уравнений Навье–Стокса.

**Основные результаты**

Излагаются новые результаты, позволяющие строить новые точные решения уравнений Навье–Стокса, исходя из известных более простых точных решений. В частности, выведены формулы, которые с помощью решений двумерных уравнений Навье – Стокса дают возможность строить более сложные решения соответствующих трехмерных стационарных и нестационарных уравнений. Эти формулы могут содержать от двух до пяти свободных параметров, которых нет в исходных двумерных решениях. Например, если распределение давления в исходном двумерном решении имеет вид

$$p = a_1(t)x^2 + a_2(t)xy + a_3(t)y^2 + b_1(t)x + b_2(t)y + b_3(t), \quad (2)$$

где  $a_n(t)$  и  $b_n(t)$  – произвольные функции, то новое трехмерное решение будет содержать три дополнительных свободных параметра, а при некоторых ограничениях на функции  $a_n(t)$  – пять свободных параметров. Важно отметить, что в стационарном случае полученные формулы не содержат квадратур.

Рассмотрен ряд примеров построения новых точных решений уравнений Навье–Стокса с помощью данных формул. Полученные результаты используются для решения некоторых задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости. Приведены примеры неединственности решений стационарных задач.

Полученные результаты распространяются также на уравнения Эйлера для идеальной жидкости.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 09-01-00343.*

*Список литературы*

1. Полянин А.Д., Аристов С.Н. Системы уравнений гидродинамического типа. Точные решения, преобразования, нелинейная устойчивость // Докл. РАН. 2009. Т. 428, №2. С. 180–185.

2. Полянин А.Д. О нелинейной устойчивости решений систем гидродинамического типа // Письма в ЖЭТФ. 2009. Т. 90, №3. С. 238–242.

3. Аристов С.Н., Князев Д.В., Полянин А.Д. Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственных переменных // Теор. основы хим. технологии. 2009. Т. 43, №5. С. 547–566.

4. Aristov S.N., Polyaniin A.D. New classes of exact solutions and some transformations of the Navier – Stokes equations // Russian J. Math. Physics. 2009. V. 17, No 1. P. 1–18.

**FORMULAS FOR CONSTRUCTING EXACT SOLUTIONS OF NAVIER – STOKES AND EULER EQUATIONS**

*A.D. Polyaniin*

The formulas that help to construct new exact solutions of Navier–Stokes and Euler equations from the known simpler exact solutions are presented. A number of examples of constructing new exact solutions of three-dimensional Navier – Stokes equations are considered. The results are used to solve some problems of a viscous incompressible fluid.

*Keywords:* Navier – Stokes equations, Euler equations, exact solutions, new formulas.