УДК 519.634; 533.951

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ МАГНИТНОГО УДЕРЖАНИЯ ПЛАЗМЫ В ЛОВУШКАХ-ГАЛАТЕЯХ

К.В. Брушлинский, Н.А. Чмыхова

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

brush@keldysh.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Обсуждаются МГД-модели равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках с погруженными в них проводниками: плазмостатические – в терминах краевых задач с уравнением Грэда – Шафранова и плазмодинамические, описывающие формирование конфигурации установлением нестационарного течения. Показано, что не существует строго равновесных конфигураций с изолированными от плазмы проводниками, но их можно получить в квазиравновесном режиме после кратковременного возрастания тока в проводниках. Приведены примеры расчетов в обеих моделях.

Ключевые слова: плазма, МГД-модели, плазмостатика и плазмодинамика, уравнение Грэда – Шафранова, магнитные ловушки.

Удержание плотной горячей плазмы магнитным полем в состоянии равновесия относится к проблемам управляемого термоядерного синтеза. С ним связаны многочисленные исследования равновесных магнитоплазменных конфигураций, в том числе математическое моделирование и расчеты. Перспективный класс ловушек-галатей, предложенных А.И. Морозовым [1], характеризуется тем, что проводники с электрическим током, создающие магнитное поле, погружены в плазменный объем. Это обеспечивает большее разнообразие геометрии поля и позволяет ожидать более высоких параметров удержания. Приводятся примеры ловушек-галатей, тороидальных и их распрямленных в цилиндр аналогов с двумя, тремя и более токами, параллельными магнитной оси и винтовыми по отношению к ней [2–4]. Рассматриваются два типа задач и соответствующие им два типа математических моделей плотной плазмы в ловушках, основанных на приближении механики магнитной газодинамики.

1. Плазмостатика

Плазмостатические модели имеют дело с равновесными конфигурациями безотносительно процесса их формирования. При наличии симметрии (плоской, осевой, винтовой) их математический аппарат сводится к краевым задачам с двумерным эллиптическим уравнением типа Грэда–Шафранова [5]:

$$\Delta\psi + \frac{dp}{d\psi} + I\,\frac{dI}{d\psi} + j^{ex}(x, y) = 0 \qquad (1)$$

для функции потока магнитного поля. Его нелинейные слагаемые содержат произвольные функции $p(\psi)$ и $I(\psi)$, описывающие распределение давления плазмы и электрического тока между магнитными поверхностями, и могут быть выбраны достаточно произвольно на основе дополнительных требований к искомой конфигурации или имеющихся экспериментальных данных. Этот математический аппарат является общим для моделей более широкого класса процессов взаимодействия реакции и диффузии и используется, например, в теории горения. С ним связаны нетривиальные вопросы существования, единственности и устойчивости решения, ответы на которые дают спектральные свойства оператора линеаризованного уравнения (1) [2].

Численное решение краевой задачи с уравнением (1) позволяет получить равновесные конфигурации плазмы и поля в различных по форме и расположению проводников ловушках и удовлетворяющие различным требованиям. Этому способствует фактическая недоопределенность задачи – возможность свободного выбора функций $p(\psi)$ и $I(\psi)$ в соответствии с предъявляемым требованием. В частности, без труда получаются конфигурации, в которых проводники оказываются изолированными от горячей плазмы, находящейся от них на конечном расстоянии. При этом ток в плазме в ближайшей окрестности каждого проводника имеет обратное направление по отношению к току в проводниках в основном объеме плазмы. Поскольку в простейших случаях току в плазме соответствует производная $dp/d\psi$, достаточно задать функцию $p(\psi)$ немонотонной в нужных областях решения задачи.

2. Плазмодинамика

Плазмодинамические модели становятся необходимыми при исследовании нестационарных процессов формирования равновесных конфигураций с требуемыми свойствами. Модель процесса установления можно получить при численном решении смешанной задачи с уравнениями магнитной газодинамики, в которой граничные условия соответствуют искомому равновесию, а начальные – какому-либо естественному распределению плазмы и поля в области ловушки. В частности, таким способом небезынтересно определить механизм установления указанных выше конфигураций плазмы, не соприкасающейся с проводниками. Однако из уравнения магнитной индукции

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathrm{rot}\,([\mathbf{v}, \mathbf{H}] - \nu \mathbf{j}),$$

где $\mathbf{H}$ – напряженность магнитного поля, $\mathbf{v}$ – скорость, $\mathbf{j} = \mathrm{rot}\,\mathbf{H}$ – плотность электрического тока, $\nu = 1/\mathrm{Re}_m$ – «магнитная вязкость», обратная магнитному числу Рейнольдса, следует, что в установившемся строгом равновесии ($\partial/\partial t \equiv 0$, $\mathbf{v} \equiv 0$) $\mathrm{rot}\,(\nu \mathbf{j}) = 0$.

В обсуждаемых здесь двумерных задачах это означает, что $\nu j_l = \mathrm{const}$, где j_l – компонента тока вдоль проводника. Значит, этот ток не может иметь разные направления в разных областях ловушки, и, следовательно, строго равновесных конфигураций плазмы конечной проводимости, изолированных от проводников, не существует. Отрицательный ток вблизи проводника, способный отодвинуть плазму от него, может быть создан лишь в нестационарном процессе, когда, например, величина тока в проводнике возрастает со временем [3]. МГД-модель такого процесса реализована в расчетах одномерной задачи в окрестности одного прямолинейного проводника [6]. В начальной стадии процесса ток в проводнике растет линейно со временем от нуля до заданного постоянного в дальнейшем значения. При этом образуется конфигурация кольцевого сечения, окружающая проводник и находящаяся на конечном расстоянии от него. Она существует в квазистационарном режиме и относительно медленно разрушается вследствие диффузии поля в плазме высокой проводимости. В расчетах получены оценки времени существования этого режима в зависимости от проводимости плазмы и параметров, характеризующих электрические токи в проводнике и в плазме. Та же модель при постоянном токе в проводнике иллюстрирует формирование равновесной конфигурации, сосредоточенной непосредственно у проводника с максимальными значениями плотности и температуры на его поверхности.

3. Модель ловушки «Пояс»

Двумерная плазмодинамическая модель построена и реализована в расчетах плазменного цилиндра квадратного сечения с двумя параллельными его оси токами, расположенными в плоскости симметрии. Здесь также ток в проводниках включается постепенно на начальной стадии процесса. МГД-задача решена численно разностным методом с коррекцией потоков по Залесаку [7]. Она рассмотрена для простоты в односвязной области, а участвующие в ней проводники с током представлены функцией jex в уравнении (1), сосредоточенной в окрестности мест их расположения [2]. При возрастании тока в проводниках в цилиндре образуется конфигурация плазмы с сечением в форме криволинейного четырехугольника с выпуклыми внутрь сторонами, сосредоточенная в центре области и охватывающая своей периферией проводники. Она существует в квазистационарном режиме и соответствует равновесной конфигурации, которая получена для той же ловушки «Пояс» [1] в расчетах плазмостатической модели, проведенных авторами в последнее время. Результаты расчетов аналогичной задачи в цилиндре круглого сечения [4] незначительно отличаются от них в центральной части, где находится обсуждаемая конфигурация, что подтверждает их надежную устойчивость по отношению к изменениям внешней границы области.

Работа поддержана РФФИ, грант № 09-01-00181.

Список литературы

1. Морозов А.И., Савельев В.В. // Усп. физ. наук. 1998. Т. 168, №11. С. 1153–1194.

2. Брушлинский К.В. Математические и вычислительные задачи магнитной газодинамики. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009. 200 с.

3. Дудникова Г.И., Морозов А.И., Федорук М.П. // Физика плазмы. 1997. Т. 23, №5. С. 387–396.

4. Брушлинский К.В., Игнатов П.А. // Журнал вычисл. математики и матем. физики. 2010. Т. 50, №12. С. 2184–2194.

5. Шафранов В.Д. // Журнал эксп. и теор. Физики. 1957. Т. 33. Вып.3(9). С. 710–722.

6. Брушлинский К.В., Чмыхова Н.А. // Математическое моделирование. 2010. Т. 22, №6. С. 3–14.

7. Оран Э., Борис Дж. Численное моделирование реагирующих потоков. М.: Мир, 1990.

MATHEMATICAL MODELS OF MAGNETIC PLASMA CONFINEMENT IN GALATEYA-TRAPS

K.V. Brushlinsky, N.A. Chmykhova

We consider MHD models of equilibrium configurations in magnetic traps with conductors immersed in the plasma. Plasmastatic models are presented in terms of boundary problems with the Grad – Shafranov equation. The plasma-dynamic ones describe time-dependent relaxation process that forms configurations. It is shown, that strongly equilibrium configurations with conductors insulated from plasma do not exist. They can be seen only in a quasi-equilibrium regime after a short-term increase of the electric current in the conductors. Some examples of computations in the both models are presented.

Keywords: MHD-models, plasmastatics and plasmadynamics, Grad – Shafranov equation, magnetic traps.