

УДК 532.5.013.4; 533.6.013.424

ТРЕХМЕРНЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ НА ВЯЗКОУПРУГОМ ПОКРЫТИИ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ПОТОКЕ

© 2011 г.

Г.В. Рыбушкина

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

ryb@appl.sci-nnov.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуется генерация трехмерных нелинейных волн на модельном вязкоупругом покрытии, обтекаемом потенциальным потоком несжимаемой жидкости. Рассмотрены периодические нелинейные волны, нарастающие при развитии квазистатической неустойчивости – волновой дивергенции. В рамках численного моделирования обнаружен скачкообразный переход от двумерных нелинейных волн к трехмерным волновым структурам, наблюдаемый в экспериментах.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, вязкоупругие покрытия, волновая дивергенция, трехмерные структуры.

Введение

Изучается нелинейная стадия квазистатической гидроупругой неустойчивости – волновой дивергенции, которая возникает на покрытиях с большими потерями [1, 2]. Возникновение волновой дивергенции связано с присутствием потенциального течения за пределами пограничного слоя [3], что позволяет проводить анализ генерации дивергентных волн в приближении потенциального обтекания. Теория возбуждения двумерных дивергентных волн большой амплитуды с существенно несинусоидальным «шиповидным» профилем прогиба поверхности покрытия [4], позволила объяснить ряд качественных особенностей наблюдаемых паттернов. Однако в экспериментах отмечалось, что при увеличении скорости потока нарастает модуляция нелинейных дивергентных волн в поперечном к потоку направлении и они быстро (фактически скачкообразно) становятся трехмерными [1]. Для описания этого явления в настоящем исследовании рассматривается развитие трехмерных дивергентных волн большой амплитуды на модельном покрытии, взаимодействующем с потенциальным потоком несжимаемой жидкости.

Модель вязкоупругого покрытия

Воспользуемся моделью покрытия [2], в которой оно заменяется тонкой пластиной, поддерживаемой распределенным пружинным основанием (рис. 1). Как и в работах [3, 4], пара-

метры модельного покрытия определим из условия совпадения его волновых параметров с аналогичными параметрами вязкоупругого слоя из резиноподобного материала. Используя результаты теории тонких пластин [5], запишем систему уравнений возбуждения изгибных волн в виде

$$\begin{aligned}
 mw_{tt} - T\Delta w + B\Delta^2 w + K_E w + bw_t &= \\
 = -p + L(w, \Phi), \quad \frac{1}{E}\Delta^2 \Phi &= -\frac{1}{2}L(w, w), \\
 L(w, w) &= 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right], \\
 L(w, \Phi) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где оси x и y направлены вдоль и поперек потока соответственно, а ось z – по нормали к этой поверхности (см. рис. 1).

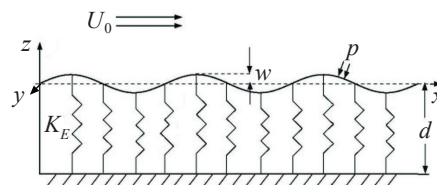


Рис. 1

При моделировании вязкоупругого слоя толщиной d жесткость пружинного основания будем считать нелинейной функцией смещения [3, 4]: $K_E \rightarrow K_{\text{eff}}(w) = K_E(1 + \sigma w^2)(1 + w/d)^{-1}$. Система (1) решается совместно с уравнением Лапласа для

потенциала течения, дополненным кинематическим и динамическим граничными условиями на поверхности пластины. Все уравнения и граничные условия были приведены к безразмерному виду и упрощены в пределе больших потерь в пластине.

Результаты численного моделирования

Периодический по x и y изгиб поверхности представлялся в виде усеченного ряда Фурье по координатам вдоль и поперек потока:

$$w(x, y, \tau) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=0}^M a_{nm}(\tau) e^{i\alpha_n x + i\beta_m y} + \text{к.с.},$$

где $\alpha_n = n\alpha_1$, $\beta_m = m\beta_1$ и $\alpha_1 = 2\pi/\Lambda_x$, $\beta_1 = 2\pi/\Lambda_y$ – волновые числа первых (продольной и поперечной) гармоник изгиба. При определении возмущений потока использовалось приближение малых уклонов поверхности: $|\partial w/\partial x|, |\partial w/\partial y| \ll 1$, которое позволило свести задачу к системе укороченных уравнений для комплексных амплитуд гармоник изгиба поверхности.

При численном решении задачи вводилась дискретизация переменных w и $\tilde{\Phi}$ по координатам x и y . Интегрирование по времени проводилось методом Рунге–Кутты 4-го порядка. На каждом шаге интегрирования по значениям коэффициентов Фурье с помощью обратного быстрого преобразования Фурье (БПФ) восстанавливалась дискретная функция w и другие переменные, входящие в нелинейные члены уравнений. Вычисление нелинейных функций проводилось в координатном представлении, после чего с помощью прямого двумерного БПФ находились коэффициенты их Фурье-разложений.

Параметры твердотельного слоя были выбраны в соответствии с данными экспериментов [1]: $G = 50$ дин/см, $d = 0.32$ см, $\mu \approx 0.5$, $\rho_s \approx 1$ г/см³, что соответствует безразмерным параметрам модельного покрытия: $B_1 \approx 0.12$, $E_1 = 2.25$, $S = 1.5$, $d_1 \approx 1.37$, $\sigma_1 = 8$ [4]. Продольный период возбуждаемых волн Λ_x принимался равным значению, рассчитанному в [4] в рамках двумерной сильно-нелинейной теории, а выбор поперечного периода Λ_y определялся с учетом вида линейного инкремента неустойчивости трехмерных возмущений так чтобы при используемом в расчете количестве продольных и поперечных гармоник $M = N = 16$ обеспечить попадание высших гармоник в область затухания.

Численное моделирование показало, что при достаточно малых надкритичностях ($V/V_c \leq 1.5$) отбор дивергентных волн приводит к установлению двумерного прогиба поверхности. При

этом волны быстро приобретают существенно несинусоидальную шиповидную форму профиля вдоль оси x . Это согласуется как с экспериментальными данными, так и с результатами расчетов в [4], в которых не использовалось приближение малых уклонов. При дальнейшем увеличении скорости потока ($V/V_c \geq 1.6$) происходит установление трехмерных дивергентных волн (рис. 2), форма которых качественно согласуется с экспериментальными данными [1].

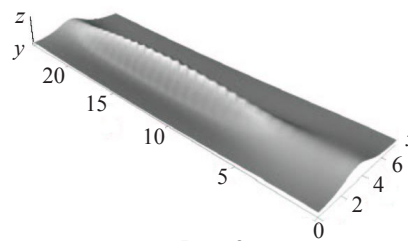


Рис. 2

Отношение V/V_c на пороге возникновения трехмерного прогиба близко к полученному в экспериментах. Спектр по волновым числам трехмерной периодической волны (рис. 3) сильно анизотропен и является существенно более узким в поперечном направлении.

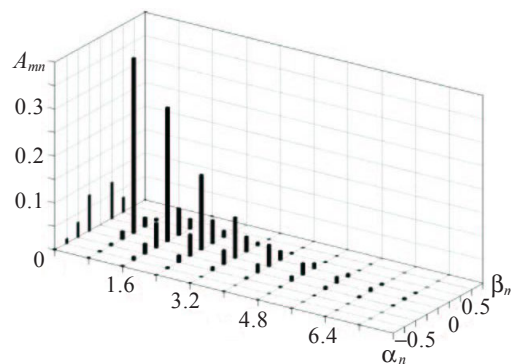


Рис. 3

Спадание спектра подтверждает правильность выбора числа учтенных гармоник.

Список литературы

1. Gad-el-Hak M., Blackwelder R.F., Riley J.J. // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 257.
2. Carpenter P.W. Garrad A.D. // J. Fluid Mech. 1985. V. 155. P. 465.
3. Reutov V.P., Rybushkina G.V. // Phys. Fluids. 1998. V. 10, No 2. P. 417.
4. Reutov V.P., Rybushkina G.V. // Phys. Fluids. 2008. V. 20 (9). P. 13.
5. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976.

THREE-DIMENSIONAL NONLINEAR WAVES ON A VISCOELASTIC COATING IN A POTENTIAL FLOW*G. V. Rybushkina*

The generation of three-dimensional nonlinear waves on a model viscoelastic coating in a potential flow of incompressible liquid is studied. The periodic nonlinear waves growing due to the development of the quasi-static instability (the wave divergence) are considered. The jump-like transition from two-dimensional nonlinear waves to three-dimensional wave patterns observed in experiments was revealed by the numerical simulations.

Keywords: incompressible fluid, viscoelastic coating, wave divergence, three-dimensional patterns.