Механика жидкости и газа
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (3), с. 1082–1084

УДК 532.511

ТЕОРЕМЫ О ВЫЧЕТАХ И О ПРИНЦИПЕ АРГУМЕНТА КАК ЕДИНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ СООТВЕТСТВУЮЩИХ СОПРЯЖЕННЫХ ТЕЧЕНИЙ; ГИДРОДИНАМИЧЕСКАЯ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

А.И. Рылов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск

rylov@math.nsc.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Обсуждается понятие сопряженного течения, вводимое с использованием как известных свойств аналитических функций из теории функций комплексного переменного (ТФКП), так и с помощью переименования одних гидродинамических параметров в другие (и те, и другие удовлетворяют уравнениям Коши –Римана).

Ключевые слова: сопряженные течения, свойства аналитических функций, гидродинамические параметры, линии уровня.

Сопряженные течения

Понятие сопряженных течений несжимаемой жидкости тесно связано с мнением о том, что каждое плоское потенциальное течение может быть описано приравниванием некоторого множества из бесконечного числа расположенных слева аналитических функций, вещественная и мнимая части которых зависят от логарифма L модуля q и угла наклона θ вектора скорости, потенциала φ, функции тока ψ и т.д., некоторому множеству из бесконечного числа расположенных справа аналитических функций $f(z) = f(x + iy)$, где x, y – прямоугольные координаты, i – «мнимая единица». В качестве примеров расположенных слева функций можно указать: $\varphi + i\psi$, $L - i\theta$, $u - iv$, где u и v – горизонтальная и вертикальная компоненты вектора скорости и т.д. В частности, для построения бесконечно-го множества аналитических функций $f(L, \theta) + ig(L, \theta)$, описывающих плоские течения, можно использовать алгоритм из [1, 2], основанный на известных решениях (разделением переменных и построением полиномиальных решений) уравнений типа Коши – Римана на плоскости L, θ. Каждому исходному течению $A + iB = f(z)$ может быть сопоставлено сопряженное течение $C + iD = f(z)$. Это означает, что линии уровня $A = \text{const}$ и $B = \text{const}$ исходного течения переименовываются (с сохранением всех параметров) в линии уровня $C = \text{const}$ и $D = \text{const}$ сопряженного течения.

Ранее термин «сопряженное течение» был использован при построении течения, отличающегося от исходного, переменной местами линий тока и линий равного потенциала [3]. Но, как оказывается, это понятие «сопряженного течения» допускает существенное расширение.

Здесь уместно отметить, что понятие «сопряженного решения» логично было ввести на примере конкретного физического приложения, а именно, на примере течений несжимаемой жидкости, что и отражено в названии доклада. Использование физического смысла позволяет исключить из рассмотрения некоторые решения, формально удовлетворяющие уравнениям Коши – Римана, но не согласующиеся с физическим смыслом.

Дело в том, что в исходном течении при круговом обходе некоторых особых точек и замкнутых линий по крайней мере такие функции, как θ и ψ, могут получать приращение, причем для функции θ такое приращение кратно 2π.

В то же время при переходе к сопряженному течению линии $\theta = \text{const}$ или $\psi = \text{const}$ могут перейти, например, в линии $q = \text{const}$, но в физически реализуемых течениях при круговом обходе такой особой точки скачок модуля q скорости а, значит, и давления p, невозможен. Выходом из положения будет введение некоторой твердой границы, совпадающей с линией тока, проходящей через указанную особую точку.

Теоремы о принципе аргумента и о вычетах как единая теорема

Переходим к теоремам о принципе аргумента и о вычетах. Рассмотрим в качестве исходного течение $L - i\theta = f(z)$ и теорему о принципе аргумента для этого течения. Опуская выкладки, напомним, что при положительном обходе нуля (точки $q = 0$) угол θ убывает, а при положительном обходе полюса (точки $q = \infty$) θ растет. Этот факт указывает на то, что при переходе к сопряженному течению $\varphi + i\psi = f(z)$ теорема о принципе аргумента исходного течения переходит в теорему о вычетах для сопряженного течения.

Действительно, при таком переходе нуль степени n исходного течения переходит, с учетом того, что $-\theta$ исходного течения переименовывается в ψ сопряженного течения, в источник интенсивности $2n\pi$ сопряженного течения, а полюс степени m – в сток интенсивности $2m\pi$ (n и m – целые положительные числа). Видно, что известная в ТФКП теорема о принципе аргумента является ничем иным, как теоремой о вычетах сопряженного течения, и это сопряженное течение в первую очередь характеризуется заменой линий $\theta = \text{const}$ исходного течения на линии тока $\psi = \text{const}$ сопряженного течения с учетом корректировки знака. Тем самым хорошо просматривается гидродинамический и геометрический смысл теоремы о принципе аргумента. Он состоит в том, что каждая из линий $\theta = \text{const}$ исходного течения либо достигает границы области, либо приходит в один из нулей. Аналогично обстоит дело с изоклинами, вышедшими из каждого из нулей. И, наконец, некоторые отрезки границы могут характеризоваться подковообразными изоклинами, начинающимися и заканчивающимися на указанных отрезках границы.

Гидродинамическая интерпретация сопряженных течений

Слоистое течение. Пусть исходное течение – равномерное течение, $u = 1$, $v = 0$, $\varphi = x$, $\psi = y$. Рассмотрим сопряженное течение, в котором $\theta = -y$, $L = x$. Непосредственная проверка показывает, что приведенное решение удовлетворяет уравнениям гидродинамики. Итак, вся область сопряженного течения состоит из бесконечного числа горизонтальных полос $-\infty \le x \le \infty$, $k\pi \le y \le (k + 1)\pi$, k – целое. Линиями тока являются как прямые $y = k\pi$, так и кривые $x = x^* - \ln|\sin y|$. Данная кривая симметрична относительно оси полосы, которую она пересекает в точке $x = x^*$. Следовательно, через каждую точку оси полосы проходит своя линия тока, для которой верхняя и нижняя границы полосы являются асимптотами. И, наконец, вдоль прямых $y = k\pi$ при четных k течение осуществляется слева направо, а при нечетном k – в обратном порядке. Данное течение может рассматриваться как течение, являющееся результатом суперпозиции бесконечного числа истоков и стоков равной по модулю интенсивности с координатами $x = \infty$, $y = k\pi$, k – целое; четное k отвечает стоку, нечетное – источнику.

Рассмотренное течение наглядно демонстрирует, что даже такое предельно простое исходное течение, как равномерное течение $u = 1$, $v = 1$, может привести к новому и достаточно сложному слоистому течению.

Спиральное течение. Исходное течение – течение от источника $2\pi\lambda = 2\pi rq$, где $\lambda > 0$ – интенсивность источника. Для данного исходного течения имеем: $\theta = \omega$, $L = \ln q = \ln\lambda - \ln r$. Здесь r и ω – полярные координаты. Рассмотрим сопряженное течение, отличающееся от исходного заменой местами изобар и изоклин (с корректировкой знака).

Итак, сопряженное течение: $\theta = \ln r - \ln\lambda$, $L = \omega$. На окружности $r = \lambda$ имеем $\theta = 0$. Выделим две точки: $\omega = (3/4)\pi$ и $\omega = -(1/4)\pi$. Проходящие через них линии тока являются логарифмическими спиралями. Первая из них приходит в начало координат, вторая выходит из начала координат. При приближении к началу координат полярный угол ω стремится к $-\infty$. Следовательно, в начале координат скорость $q = 0$. Обе спирали, являющиеся линиями тока, уместно считать границей течения, осуществляющегося к центру вдоль первой спирали и затем от центра вдоль второй спирали. В этом случае удается избежать скачка давления при круговом обходе центра (начала координат).

Рассмотренное течение является существенно новым, его можно лишь частично признать спиральным, так как в нем логарифмическими спиралями являются лишь отмеченные линии тока. Здесь уместно напомнить о спиральных течениях в гидродинамике, а именно о течениях Тейлора (1930) и Толлминна (1937). В первом из них спиралями являются линии тока, выходящие из начала координат (речь идет о суперпозиции потенциального вихря и течения от источника). Во втором спиралями яв- ляются изобары. Но в отличие от построенно-го выше течения, в течениях Тейлора и Толлминна скорость в начале координат отлична от нуля.

Работа поддержана проектом 103 СО РАН.

Список литературы

1. Рылов А.И. // Докл. РАН. 2002. Т. 383, №1.
2. Рылов А.И. // Докл. РАН. 2007. Т. 417, №4.
3. Кочин Н.Е., Кибель Н.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: ОГИЗ, 1941.

THEOREMS ON RESIDUES AND ON THE ARGUMENT PRINCIPLE AS A COMMON THEOREM FOR THE CORRESPONDING CONJUGATE FLOWS; HYDRODYNAMICS AND GEOMETRIC INTERPRETATIONS

A.I. Rylov

The notion of conjugate flow is discussed which is introduced by means of the well-known properties of analytic functions in complex analysis as well as of renaming some hydrodynamic parameters into other ones (both are subject to the Cauchy–Riemann equations).

Keywords: conjugate flow, properties of analytic functions, hydrodynamic parameters, level lines.