УДК 533.9

ЗАДАЧИ ПЛАЗМОСТАТИКИ
В ДВУХЖИДКОСТНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В.В. Савельев

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

ssvvvvv@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Представлен новый подход к исследованию равновесных плазменных конфигураций, основанный на последовательном использовании двухжидкостного гидродинамического описания электрон-ионной плазмы с учетом инерции электронов. Получены уравнения плазмостатики, являющиеся обобщением известного уравнения Грэда – Шафранова. Приведены примеры численного и аналитического решения этих уравнений применительно к магнитной ловушке типа тэта-пинч. Показано, что основные свойства конфигураций не зависят от малого параметра – отношения масс электрона и иона, а определяются инерционной длиной.

Ключевые слова: двухжидкостная МГД, инерция электронов, магнитная ловушка, уравнение Грэда–Шафранова.

Задачи плазмостатики исторически возникли как составная часть программы управляемого термоядерного синтеза. В центре внимания находится расчет равновесных конфигураций плазмы и удерживающего ее магнитного поля. Теоретической основой исследования технических конструкций, реализующих равновесные конфигурации (магнитные ловушки), на сегодняшний день остается в основном МГД-теория. В случае осевой симметрии равновесная МГД-конфигурация ищется как решение известного уравнения Грэда – Шафранова (ГШ). В настоящем исследовании применительно к задачам плазмостатики рассмотрена двухжидкостная гидродинамическая модель, согласно которой плазма – это совокупность двух взаимопроникающих сжимаемых газов – электронного и ионного. Микроскопической основой такого представления служит отмеченное еще Л.Д. Ландау обстоятельство, что равновесное максвелловское распределение в каждой из плазменных компонент – электронной и ионной – устанавливается гораздо быстрее, чем происходит теплообмен между ними. Основное внимание в работе уделено изучению важного частного класса магнитных ловушек типа тэта-пинч, которые характеризуются осевой симметрией и наличием только азимутальных токов и полоидальных магнитных полей. Анализ полученных результатов показывает, что учет двухжидкостной структуры плазмы (учет инерции электронов) приводит к появлению новых классов равновесных конфигураций тэта-пинча, не описываемых МГД-теорией. Среди них есть как равновесия, получающиеся слабым возмущением некоторых грэд-шафрановских конфигураций, так и равновесия, кардинально отличающиеся от МГД-конфигураций и не переходящих в них в МГД-пределе.

Используем цилиндрические координаты (r, φ, z) и стандартные обозначения для МГД-величин. Рассмотрим задачу нахождения равновесных осесимметричных конфигураций, для которых $\partial/\partial\varphi = H_\varphi = j_r = j_z = 0$. С точки зрения гидродинамической аналогии речь идет о нахождении стационарных течений несжимаемой жидкости вокруг оси симметрии. Классическое уравнение ГШ в этом случае имеет вид

$$\Delta^*\Psi = -16\pi^3 r^2 \frac{dP(\Psi)}{d\Psi} - \frac{8\pi^2 r}{c} j_\varphi^0(r,z),$$
$$\Delta^*\Psi \equiv \frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial r}. \quad (1)$$

Здесь $\Psi(r,z)$ – функция магнитного потока, $P(\Psi)$ – произвольная заданная функция Ψ, имеющая смысл давления плазмы, $j_\varphi^0(r,z)$ – известная функция, определяющая распределение внешних токов. В двухжидкостной МГД вместо (1) будем иметь два уравнения [1, 2]:

$$\Delta^*\Psi = -16\pi^3 r^2 \frac{\partial P}{\partial\Psi} - \frac{8\pi^2 r}{c} j_\varphi^0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = \varepsilon \frac{r}{\rho(r,\Psi)}\left(\frac{\partial P}{\partial\Psi}\right)^2, \quad \varepsilon = \frac{4\pi^2 c^2}{e^2} m_e m_i, \quad (3)$$

где m_e, m_i – масса электронов и ионов соответственно. Теперь давление P – не произвольная функция Ψ, как это было для уравнения ГШ, оно функционально зависит также от r и должно определяться как решение нелинейного уравнения в частных производных (3). Физический смысл этого уравнения состоит в учете центробежной силы, действующей на вращающиеся вокруг оси z электроны и ионы. В МГД-статике центробежной силы просто нет. Уравнение (3) содержит «малый» параметр ε. При $\varepsilon = 0$ получается уравнение ГШ. Если $\varepsilon \ll 1$, естественно считать, что $\partial P/\partial r \approx 0$, $P \approx P(\Psi)$, и, следовательно, решения (2) должны быть близки к решениям уравнения ГШ. В действительности из-за нелинейности уравнения (3) положение более сложное. Можно показать, что для любого $\varepsilon \ll 1$ уравнение (3) имеет много решений, для которых $\partial P/\partial r >> 1$. Решение системы (2), (3) позволяет найти не только распределения магнитного поля и давления (с точностью до аддитивного слагаемого), но и абсолютные значения плотности.

Приводятся различные аналитические и численные решения этой системы на примере двух магнитных ловушек – дублета и диполя. На рисунках представлен пример такого решения для ловушки «Диполь», когда распределения магнитного поля и давления близки к распределениям, даваемым решением уравнения ГШ. Показано распределение давления P (рис. 1) и плотности n (рис. 2).

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №09-01-00181.

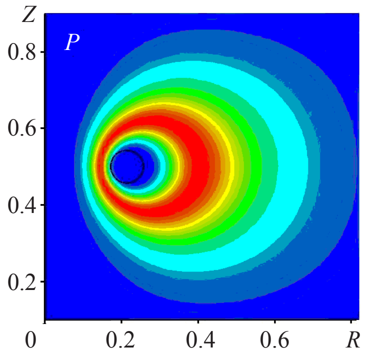

Рис. 1

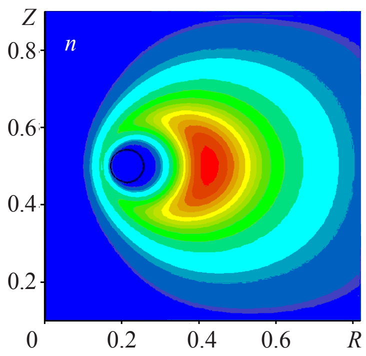

Рис. 2

Список литературы

1. Gavrikov M.B., Savelyev V.V. // Journal of Mathematical Sciences. 2009. V. 163, No1. P. 1–40.

2. Гавриков М.Б., Савельев В.В. // Механика жидкости и газа. 2010. №2. С. 176–192.

PLASMASTATIC PROBLEMS IN TWO-FLUID MAGNETOHYDRODYNAMICS

V.V. Savelyev

This paper presents a new approach to the study of equilibrium plasma configurations, based on systematic use of two-fluid hydrodynamic description of electron-ion plasma, taking into account the inertia of electrons. The plasmastatic equations which generalize the well-known Grad–Shafranov equation are obtained. It is shown that the basic configuration properties do not depend on a small parameter – the mass ratio of electron and ion, but are determined by the inertial length.

Keywords: two-fluid magnetohydrodynamics, inertia of electrons, magnetic trap, Grad–Shafranov equation.