

УДК 533.7

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО  
УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА, МНОГОКОМПОНЕНТНАЯ НЕРАВНОВЕСНАЯ  
ГАЗОВАЯ ДИНАМИКА И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ**

© 2011 г.

С.А. Серов<sup>1</sup>, С.С. Серова<sup>2</sup><sup>1</sup>Российский федеральный ядерный центр – ВНИИ экспериментальной физики,  
Институт теоретической и математической физики, г. Саров<sup>2</sup>Санкт-Петербургский госуниверситет

serov@vniief.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Сформулирован корректный метод асимптотического решения кинетического уравнения Больцмана, обсуждаются метод Гильберта и метод Энского. Получена система уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики, соответствующая первому порядку в приближенном методе решения кинетического уравнения Больцмана в рамках подхода Струминского. Для однокомпонентного газа показано, что функции распределения скоростей, полученные предлагаемым методом и методом Энского, эквивалентны с точностью до членов первого порядка малости асимптотического разложения (включительно); соответственно совпадают системы газодинамических уравнений второго порядка, но, вообще говоря, различаются в следующем порядке асимптотического разложения. Предложена интерпретация турбулентного течения газа, как расслоенного на компоненты течения газа, которое описывается полурешенной системой уравнений.

*Ключевые слова:* асимптотические решения, кинетическое уравнение Больцмана, многокомпонентная неравновесная газовая динамика, турбулентность.

**Введение**

В 1912 году Гильберт в [1], гл. XXII, как пример интегрального уравнения, рассмотрел кинетическое уравнение Больцмана для однокомпонентного газа и предложил «рецепт» его приближенного (асимптотического) решения. «Рецепт» Гильберта был неудобен для использования в конкретных приложениях, поскольку для определения пяти произвольных функциональных параметров первого и следующих приближений функции распределения скоростей предлагалось решать системы дифференциальных уравнений. Энског (см., например, [2]) предложил использовать «нулевые» условия для определения пяти произвольных функциональных параметров первого и следующих приближений функции распределения скоростей. Фактически, предложение Энского сводится к использованию различных шкал сравнения для асимптотических разложений функции распределения скоростей, плотности числа частиц, средней скорости частиц и температуры. Нарушение Энскогом логики метода последовательных приближений проявилось в том, что в соответствии с «нулевыми» условиями временные производные в необходимых условиях

существования решений интегральных уравнений первого и высших порядков оказываются равными нулю, а с ними оказываются равными нулю члены газодинамических уравнений, соответствующие вязкости, теплопроводности... Энског «улучшил» положение введением необоснованного разложения частной производной по времени.

Подход Струминского, предложившего в [3] свой метод приближенного решения кинетического уравнения Больцмана для многокомпонентного газа, отличается от подхода Энского к приближенному решению уравнения Больцмана для газовой смеси, по существу, только тем, как вводится параметр малости в уравнение Больцмана для газовой смеси.

**Измененный метод Струминского решения  
кинетического уравнения Больцмана**

На примере предложенного Струминским метода приближенного решения кинетического уравнения Больцмана для многокомпонентного газа показано, как необходимо изменить метод Энского: необходимо вместе с асимптотическим разложением функции распределения скоростей частиц  $i$ -го компонента газовой сме-

си ввести и использовать (в соответствии с определениями) разложения для плотности числа частиц  $n_i$   $i$ -го компонента, средней скорости  $u_i$   $i$ -го компонента и температуры  $T_i$   $i$ -го компонента.

### Вычисление определенных многомерных интегралов

Получены аналитические выражения интегралов столкновений для общего случая, когда отдельные компоненты (с максвелловским распределением скоростей частиц) имеют, вообще говоря, различные средние скорости и температуры (статья Струминского [3], а в результате и последующие его работы, ссылавшиеся на [3], например, [4], содержала ошибки в вычислении аналогичных интегралов столкновений).

### Система уравнений первого порядка многокомпонентной неравновесной газовой динамики

Система уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики первого порядка малости, появляющаяся в процессе решения уравнения Больцмана предлагаемым авторами методом как необходимое условие существования приближенного (асимптотического) решения, может быть также независимо получена из уравнения Больцмана как система уравнений переноса, выражающих законы сохранения числа частиц, импульса и энергии, если в качестве функций распределения скоростей частиц взять функции Максвелла (с различными средними скоростями и температурами отдельных компонентов смеси). Систему уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики первого порядка малости можно записать в виде:

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial r} n_i u_i, \quad (1)$$

$$n_i m_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} p_i^{(0)} - \sum_{j \neq i} I_{p,ij}^{(0)} = \\ = n_i X_i - n_i m_i u_i \frac{\partial}{\partial r} u_i, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \widehat{E}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r} q_i^{(0)} + p_i^{(0)} : \frac{\partial u_i}{\partial r} - \\ - \sum_{j \neq i} I_{p,ij}^{(0)} = -\frac{\partial}{\partial r} \widehat{E}_i u_i. \quad (3)$$

### Значения кинетических интегралов для потенциала взаимодействия твердых сфер

Интегральные слагаемые, фигурирующие в системе уравнений многокомпонентной неравновесной газовой динамики первого порядка малости (1)–(3), для конкретной модели потенциала взаимодействия частиц смеси – потенциала твердых сфер – легко вычисляются до конца (аналитические выражения для интегралов столкновений, о которых говорилось ранее, зависят, как и интегралы  $\Omega_{ij}^{(l)}(s)$  в теории Энскога – Чепмена, от произвольной функции расстояния между частицами – потенциала центрального взаимодействия между частицами); приведены их выражения, которые можно непосредственно использовать в расчетах газодинамических течений.

### Предлагаемый метод и теория Энскога–Чепмена

Показано, что функции распределения скоростей, полученные предлагаемым методом и методом Энскога, эквивалентны с точностью до членов первого порядка малости асимптотического разложения (включительно; соответственно, совпадают системы газодинамических уравнений второго порядка), но, вообще говоря, различаются в следующем порядке асимптотического разложения. Это различие является возможной причиной того, что переход к более высокому порядку приближения в методе Энскога не приводит какому-либо существенному улучшению результатов.

### Турбулентность как многокомпонентная газовая динамика

Отмечается, что если вязкость газа стремится к нулю, то такое турбулентное течение должно описываться системой газодинамических уравнений, соответствующей первому порядку приближения в приближенном методе решения уравнения Больцмана. Но система газодинамических уравнений первого порядка теории Энскога–Чепмена не может описать течение газа с возрастанием энтропии.

Предложена интерпретация турбулентных течений в рамках многокомпонентной неравновесной газовой динамики.

#### Список литературы

1. Гильберт Д. Основы общей теории линейных интегральных уравнений. Избранные труды. Т. 2.

М.: Факториал, 1998.

2. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М.: ИЛ, 1960.

3. Струминский В.В. // ПММ. 1974. Т. 38. С. 203.

4. Струминский В.В., Великодный В.Ю. // ДАН СССР. 1982. Т. 266. С. 28.

**ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE KINETIC BOLTZMANN EQUATION,  
MULTI-COMPONENT NONEQUILIBRIUM GAS-DYNAMICS AND TURBULENCE**

*S.A. Serov, S.S. Serova*

A correct method for asymptotically solving Boltzmann kinetic equation is formulated, Hilbert method and the Enskog method are considered. The equations system of multi-component nonequilibrium gas-dynamics is derived, that corresponds to the first order in the approximate method for solution of the kinetic Boltzmann equation in the frame of Struminskii approach. For one-component gas, it is shown that velocity distribution functions calculated by the proposed method and by the Enskog method, are equivalent to the first infinitesimal order terms (inclusive; accordingly, systems of gas-dynamic equations of the second order coincide), but, generally, differ in the next order. An interpretation of turbulent gas flow is proposed in the form of a gas flow stratified to components, which is described by the derived equations system.

*Keywords:* asymptotic solutions, kinetic Boltzmann equation, multi-component nonequilibrium gas-dynamics, turbulence.