УДК 532.3

ВЕРТИКАЛЬНЫЙ УДАР ГОРИЗОНТАЛЬНОЙ ПЛАСТИНКИ В СЛОЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Б.И. Сметанин

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

smet@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается плоская задача о центральном ударе тонкой жесткой пластинки, расположенной в срединной плоскости слоя несжимаемой жидкости. В момент удара происходит отрыв жидкости от задней стороны пластинки. Движение жидкости после удара является потенциальным. Задача сведена к решению сингулярного интегрального уравнения. Для решения этого уравнения применены метод малого параметра и метод ортогональных многочленов.

Ключевые слова: несжимаемая жидкость, удар плавающей пластинки, импульсивное давление.

1. Интегральное уравнение задачи

Пусть ширина пластинки равна $2a$. Область, занятая жидкостью, определяется условиями: $-h \le y \le h$, $-\infty < x < \infty$. При центральном ударе все точки пластинки приобретают одинаковую скорость, равную U. Движение жидкости после удара является потенциальным. Импульсивное давление $p_*(x, y)$ связано с потенциалом скоростей $\varphi(x, y)$ формулой $p_* = -\rho\varphi$, где ρ – плотность жидкости [1]. Функция φ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0$$

при следующих граничных условиях и условии на бесконечности:

$$v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -U \ (y = -0, \ |x| \le a),$$

$$\varphi = 0 \ \ (y = +0, \ |x| \le a),$$

$$\varphi = 0 \ (y = h, |x| < \infty), \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0 \ (y = -h, |x| < \infty),$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} \to 0 \ \ (|y| \le h, |x| \to \infty),$$

v_y – проекция вектора скорости на ось Oy.

Методом интегральных преобразований задача сводится к решению сингулярного интегрального уравнения относительно некоторой вспомогательной функции ψ [2]:

$$\int_{-1}^{1} \psi(\eta) k[(\eta - \xi)\lambda] d\eta = 2\pi \quad (|\xi| \le 1), \qquad (1)$$

$$k(t) = \pi\delta(t) + \operatorname{cosech} t - \operatorname{sech} t,$$

$$\xi = x/a, \quad \lambda = \pi a/(4h).$$

Здесь $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Функция ψ должна удовлетворять дополнительному условию [3]:

$$\int_{-1}^{1} \psi(\eta) k_1(\eta) d\eta = 0, \quad k_1(\eta) = \frac{\pi}{2}(\operatorname{sign}\eta + 1) +$$

$$+ \ln \operatorname{th}\frac{\lambda|\eta|}{2} - 2\operatorname{arctg}(\exp\lambda|\eta|). \qquad (2)$$

Суммарный ударный импульс P^* и импульсивное давление p^* в области контакта пластинки с жидкостью выражаются через функцию ψ соответственно формулами

$$P_* = \int_{-a}^{a} p_* dx = \rho U a^2 \int_{-1}^{1} \eta\psi(\eta) d\eta,$$

$$p_* = \frac{1}{4}\rho U a \int_{-1}^{1} \psi(\eta)[\operatorname{sign}(\eta - \xi) + \operatorname{sign}(\eta + \xi)] d\eta.$$

Нормальная составляющая скорости жидких частиц на свободной поверхности слоя жидкости определяется формулой

$$v_y = -\frac{\sqrt{2}U\lambda}{2\pi} \int_{-1}^{1} \psi(\eta)\{k_2[(\eta - \xi)\lambda] + k_2[(\eta + \xi)\lambda]\} d\eta$$

$$(|\xi| < \infty), \ \ k_2(t) = (\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t)\operatorname{sech}(2t).$$

2. Решение интегрального уравнения

Решение интегрального уравнения (1) с условием (2), полученное методом малого параметра [3], имеет вид:

$$\psi(\xi) = \sqrt{2}\left(X(\xi)\right)^{-1}[(2\pi)^{-1} Q L_1(\xi) + L_2(\xi)],$$

$$X(\xi) = (1 - \xi)^{0.25}(1 + \xi)^{0.75} \quad (0 < \lambda < 0.2), \qquad (3)$$

$$L_1(\xi) = 1 + \left(\xi + \frac{1}{2}\right)\lambda - \left(\xi^2 + \xi - \frac{1}{8}\right)\frac{\lambda^2}{6} -$$

$$-\left(\xi^3+\frac{3}{2}\xi^2+\frac{5}{8}\xi-\frac{3}{16}\right)\frac{\lambda^3}{2}+O(\lambda^4),$$

$$L_2(\xi)=\xi+\frac{1}{2}+\left(\xi+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda^2}{16}+\left(\xi^2+\frac{2}{3}\xi-\frac{7}{24}\right)\frac{3\lambda^3}{8}+$$

$$+O(\lambda^4),\quad Q=\int_{-1}^{1}\psi(\eta)d\eta=\frac{\pi F_1(\lambda)}{F_2(\lambda)},$$

$$F_1(\lambda)=1-\frac{3\lambda}{4}+\frac{\lambda^2}{12}+\frac{45\lambda^3}{128}+O(\lambda^4),$$

$$F_2(\lambda)=\ln\frac{8}{\lambda}-\lambda+\frac{25\lambda^2}{48}+\frac{3\lambda^3}{8}+O(\lambda^4).$$

При $0.2\le\lambda<\infty$ следует использовать метод ортогональных многочленов решения интегрального уравнения (1), (2). В этом случае функцию ψ нужно представить в виде

$$\psi(\xi)=\frac{1}{X(\xi)}\sum_{n=0}^{\infty}Y_nP_n^{(-0.25,-0.75)}(\xi),$$

где $P_n^{(-0.25,-0.75)}(\xi)$ – многочлены Якоби, Y_n – подлежащие определению коэффициенты. Реализация процедуры метода ортогональных многочленов приводит решение интегрального уравнения к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений второго рода относительно Y_n. Доказана квазивполне регулярность полученной системы. Для ее решения используется метод редукции. На рис. 1 приведен график функции $v(\xi)=(U)^{-1}\lambda v_y(a\xi,h)$ при $\lambda = 1/3$.

На рис. 2 приведен график зависимости приведенного значения суммарного ударного импульса $P=(\rho Ua^2)^{-1}P_*$ от относительной глубины слоя жидкости λ^{-1}.

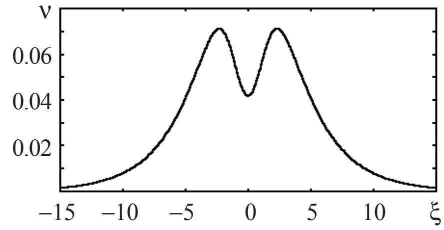

Рис. 1

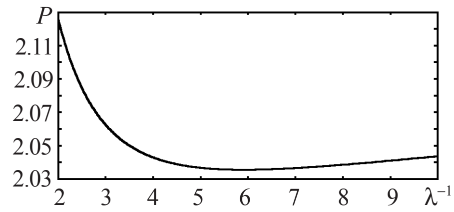

Рис. 2

Список литературы

1. Седов В.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.

2. Сметанин Б.И. // Изв. вузов. Северо-Кавказский регион. Естественные науки. 2009. №3. с. 44–47.

3. Сметанин Б.И. // ПММ. 1985. Т. 49, вып. 5. С. 784–790.

VERTICAL IMPACT OF A HORIZONTAL PLATE IN A LAYER OF AN INCOMPRESSIBLE LIQUID

B.I. Smetanin

The plane problem about a central vertical impact of a thin rigid plate located in the median plane of a layer of an incompressible liquid is considered. At the moment of the impact, liquid separates from the back part of the plate. Application of a method of integrated transformations has led the problem to the solution of the integrated equation of the first kind. The method of small parameter and a method of orthogonal polynomials have been applied to the analysis of this equation.

Keywords: incompressible liquid, blow of a floating plate, impulsive pressure.