УДК 533.2

РАСШИРЕНИЕ (СЖАТИЕ) КОНЕЧНОГО ОБЪЕМА ВЯЗКОГО ГАЗА

А.И. Снопов

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону

asnop@math.rsu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

В переменных Эйлера и Лагранжа представлены частные точные аналитические решения уравнений движения вязкого газа, описывающие одномерные процессы диабатического расширения или сжатия конечных объемов газа сферической и цилиндрической форм. Решения содержат произвольную функцию времени, а также ряд постоянных величин, определяющих начальное состояние газа.

Ключевые слова: вязкий газ, точные аналитические решения, одномерные процессы, расширение, сжатие.

Решение в переменных Эйлера

С использованием компьютерных технологий аналитических вычислений установлено [1, 2], что уравнение неразрывности газа удовлетворяется при условии, что скорость u частицы газа, удаленной от центра облака на расстояние r, и плотность газа ρ изменяются со временем t по закону

$$u = \frac{rb}{1+2bt}, \quad \rho = \frac{\rho_0}{(1+2bt)^{n/2}}. \qquad (1)$$

При $b > 0$ имеет место расширение облака, при $b < 0$ – сжатие; $n = 1$ – осевая деформация цилиндра, $n = 2$ – радиальная деформация круглого цилиндра, $n = 3$ – радиальная деформация сферы.

Давление газа в облаке определяется из уравнения движения газа, при этом оно распределено неравномерно

$$p = \frac{\rho_0 r^2 b^2}{2(1+2bt)^{2+n/2}} + f(t). \qquad (2)$$

Входящая в выражение для давления функция времени $f(t)$ находится из уравнения баланса энергии и в общем случае имеет такую структуру:

$$f(t) = C(1+2bt)^{-n\kappa/2} + \mu b f_\mu(t) + \lambda b f_\lambda(t) + f_{Q_1}(t), \qquad (3)$$

где функции $f_\mu(t)$ и $f_\lambda(t)$ отражают соответственно эффекты сдвиговой (индекс μ) и объемной (индекс λ) вязкости газа, функция $f_{Q_1}(t)$ – влияние внешнего подвода тепла $Q_1(t)$, не зависящего от расположения частиц газа в облаке, C – произвольная постоянная, $\kappa = c_P/c_V$.

Аддитивная зависимость давления от положения частиц газа в облаке может быть реализована только за счет внешнего индивидуального притока тепла к этим частицам, который устанавливается формулой

$$Q_2 = \frac{(n(\kappa-1)-2)\rho_0 r^2 b^3}{2(\kappa-1)(1+2bt)^{3+n/2}}. \qquad (4)$$

Выделение тепла за счет трения может идти на нагрев газа или может быть компенсировано внешним равномерным радиационным теплоотводом полностью или частично. Может также предполагаться независимый подвод или отвод тепла $Q_1(t)$, равномерный для всех частиц газа.

Во всех этих случаях вид функции $f_{Q_1}(t)$ определяется по формуле

$$f_{Q_1}(t) = (\kappa-1)(1+2bt)^{-n\kappa/2}\int Q_1(\tau)(1+2b\tau)^{n\kappa/2}d\tau. \qquad (5)$$

Если $Q_1(t) \equiv 0$ и выполняется равенство (5), то функции $f_\mu(t)$ и $f_\lambda(t)$ определяются из уравнения баланса энергии и имеют вид

$$f_\mu(t) = n\frac{\kappa/\mathrm{Pr} + 2(\kappa-1)}{(n\kappa-2)(1+2bt)}, \qquad f_\lambda(t) = \frac{n^2(\kappa-1)}{(n\kappa-2)(1+2bt)}. \qquad (6)$$

В представленное решение уравнений движения газа входят произвольные постоянные b, ρ_0, C и произвольная функция времени $Q_1(t)$, к которым необходимо добавить еще начальный радиус облака r_0, также играющий роль произвольного параметра.

Решение в переменных Лагранжа

Для исследования процессов расширения и сжатия облака удобно перейти от переменных Эйлера в переменным Лагранжа, используя уравнение $\dot{r} = u$, решение которого имеет вид

$$r = \xi\sqrt{1+2bt}. \qquad (7)$$

При $t = 0$ $\xi = r(0)$. Следовательно, ξ является радиальной координатой частицы газа в начальный момент времени. Для частиц газа, находившихся в начальный момент времени на границе облака, $\xi = r_0$. Следовательно, граница облака в текущий момент времени имеет радиус $r = r_0\sqrt{1+2bt}$. В переменных Лагранжа формулы (2) и (3) принимают вид

$$p = \frac{\rho_0 \xi^2 b^2}{2(1+2bt)^{1+n/2}} + f(t),$$
$$Q_2 = \frac{(n(\kappa-1)-2)\rho_0\xi^2 b^3}{2(\kappa-1)(1+2bt)^{2+n/2}}. \qquad (8)$$

Поле температур в облаке определяется из уравнения Клапейрона $p = RT\rho$ по формуле

$$T = \frac{\xi^2 b^2}{2R(1+2bt)} + \frac{f(t)}{R\rho_0}(1+2bt)^{n/2}. \qquad (9)$$

Анализ формул (8) показывает, что $Q_2 \equiv 0$ при $n = 3$ и $\kappa = 5/3$. Чтобы при этом процесс расширения (сжатия) газового облака был адиабатическим, достаточно принять $Q_1(t) \equiv 0$. Так как $n = 3$ соответствует облаку сферической формы, а $\kappa = 5/3$ присуще только одноатомным газам, то из представленного аналитического решения следует, что оно приемлемо для описания адиабатических процессов расширения (сжатия) одноатомных газов, образующих в начальный момент времени сферическое облако.

Если же равенства $n = 3$ и $\kappa = 5/3$ одновременно не выполняются, то изложенное решение может быть использовано для приближенного анализа диабатических процессов расширения (сжатия) газовых объемов рассмотренных форм в жидких и газовых средах с учетом того, что процессы взрыва, горения нагрева и охлаждения носят временной характер, а не мгновенный.

Список литературы

1. Снопов А.И. Диабатическая модель расширения газового облака под воздействием радиационного притока тепла // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды IX Междунар. конф., посвященной 85-летию со дня рождения акад. РАН И.И. Воровича. 2005. Т. 1. С. 186–188.

2. Снопов А.И. Диабатическое сжатие газового облака // Современные проблемы механики сплошной среды. Труды X Междунар. конф. 2006. Т. 1. С. 264–265.

EXPANSION (COMPRESSION) OF A FINITE VOLUME OF VISCOUS GAS

A.I. Snopov

Particular exact analytical solutions of equations of motion of a viscous are presented gas in the Euler and Lagrange variables, which describe one-dimensional processes of diabatic expansion or compression of finite volumes of gas of spherical and cylindrical forms. These solutions contain an arbitrary function of time, as well as a number of constants defining the initial state of the gas.

Keywords: viscous gas, exact analytical solutions, one-dimensional processes, expansion, compression.