

УДК 512.816;532.529.2

## О КОНВЕКЦИИ БИНАРНОЙ СМЕСИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ СЛОЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЭФФЕКТА СОРЕ ПРИ НЕЛИНЕЙНОЙ СИЛЕ ПЛАВУЧЕСТИ

© 2011 г.

*И.В. Степанова*

Институт вычислительного моделирования СО РАН, Красноярск

stepiv@icm.krasn.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Построено и исследовано инвариантное решение задачи о стационарном течении бинарной смеси в вертикальном слое под действием эффекта Соре в случае, когда уравнение состояния есть нелинейная функция температуры и концентрации. Обнаружены различия в поведении функций скорости и плотности по сравнению с приближением Обербека – Буссинеска в зависимости от характера нелинейности.

*Ключевые слова:* бинарная смесь, термодиффузия, сила плавучести, инвариантное решение.

### Постановка задачи. Основные уравнения движения

Жидкости, встречающиеся в природе и технических приложениях, как правило, неоднородны. Конвективные течения бинарных смесей достаточно сложны, поскольку движение и диффузия частиц происходит не только под действием градиента концентрации, но и под влиянием градиента температуры. Такое явление называется термодиффузией или эффектом Соре [1]. Термодиффузионная конвекция в бинарных смесях и связанные с ней явления переноса тепла и массы играют важную роль в природе и промышленном производстве. Например, термохалинная конвекция в океане возникает под действием градиентов солености, порожденных разностью температур в слоях воды. Эффект Соре играет заметную роль в технических приложениях: разделение изотопов в жидких и газовых смесях, выращивание кристаллов.

Рассмотрим бинарную смесь с уравнением состояния

$$\rho = \rho_0 F(T, c),$$

где  $\rho_0$  – плотность смеси при средних значениях температуры  $T$  и концентрации легкой компоненты  $c$ ;  $F$  – произвольная гладкая функция, отвечающая за силу плавучести. Уравнения движения имеют вид:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} &= -\rho_0 \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{g} F, \\ \partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T &= \chi \nabla^2 T, \\ \partial_t c + \mathbf{u} \cdot \nabla c &= D \nabla^2 c + D_T \nabla^2 T, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0.$$

В системе (1)  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$  – вектор координат;  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  – вектор скорости;  $p$  – давление,  $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$  – вектор ускорения силы тяжести;  $\nu, \chi, D, D_T$  – коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, диффузии и термодиффузии соответственно. Предполагается, что  $\nu, \chi, D$  положительны, при этом  $\chi \neq D$ , коэффициент  $D_T$  может иметь любой знак: если  $D_T < 0$ , термодиффузию называют нормальной, в этом случае тяжелые компоненты стремятся перейти в более холодные области, а легкие – в более нагретые; если  $D_T > 0$ , наблюдается аномальная термодиффузия, при которой направление движения компонентов меняется на противоположное.

Для системы (1) в [2] была решена задача групповой классификации относительно функции  $F$ : найдены аналитические представления для этой функции, выписаны дифференциальные операторы, допускаемые системой (1) для каждого представления  $F$ . Эти операторы позволяют строить решения системы (1), инвариантные относительно преобразований, порождаемых соответствующими операторами.

Согласно результатам, полученным в [2], будем рассматривать представление функции  $F(T, c) = c - D_T / (\chi - D) T + f(D_T / (\chi - D) T)$ , (2) где  $f$  – произвольная функция. Пусть движение происходит в плоском вертикальном слое, ограниченном твердыми стенками, на которых поддерживается постоянная температура. Скорость имеет только вертикальную составляющую, которая зависит от горизонтальной координаты.

В стационарном режиме течения предполагается наличие постоянного градиента концентрации в вертикальном направлении. Согласно выбранным условиям, решение системы (1) ищется в виде:

$$u_1 = u_2 = 0, \quad u_3 = w(x), \quad p = \rho_0 P(x) + \rho_0 g A \frac{z^2}{2},$$

$$T = \frac{D_T}{\chi - D} \theta(x), \quad c = K(x) + Az + \frac{D_T}{\chi - D} \theta(x),$$

где  $A$  – вертикальный градиент концентрации. На твердых стенках задаются условия прилипания, температура и отсутствие потока вещества. Наряду с граничными условиями средняя концентрация в слое считается известной, вертикальный поток вещества через поперечное сечение слоя полагается равным нулю.

### Анализ решения

Поставленная задача сводится к решению краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Если ввести функцию тока  $Q$  таким образом, что  $w = -\partial Q / \partial x$ , то полученную систему можно свести к неоднородному уравнению четвертого порядка на функцию  $Q$ , а все искомые характеристики течения затем выразить через функцию тока. Решение уравнения на функцию  $Q$  зависит от знака продольного градиента концентрации. Поэтому этот градиент существенно влияет на режим течения: в зависимости от его знака выделяются разные представления функций скорости, концентрации и плотности, а его величина находится из условия отсутствия вертикального потока вещества через поперечное сечение слоя. Это условие записывается в виде уравнения, содержащего два слагаемых, одно из

которых отвечает за вертикальный перенос жидкости, а второе – за диффузию в вертикальном направлении. Показано, что при некоторых ограничениях на входные данные вторым слагаемым в описанном условии можно пренебречь, а при отсутствии массовых сил оно обращается в ноль.

Следует отметить, что задача была решена для различных представлений функции  $f$ , входящей в уравнение состояния (2). Проанализирована зависимость скорости и плотности от характера нелинейности функции  $f$ . Показано отличие результатов от классической модели термодиффузии Обербека – Буссинеска, исследованной в работе [3].

Полученные результаты могут использоваться для уточнения математической модели конвективного движения под действием силы плавучести и эффекта Соре, а также для вычисления коэффициента термодиффузии в термогравитационных колоннах или других установках.

*Работа выполнена при поддержке Интеграционного проекта СО РАН № 65.*

### Список литературы

1. Рабинович Г.Д., Гуревич Р.Я., Боброва Г.И. Термодиффузионное разделение жидких смесей. Минск: Наука и техника, 1971. С. 244.
2. Андреев В.К., Степанова И.В. Симметрия уравнений термодиффузии при нелинейной зависимости силы плавучести от температуры и концентрации // Вычислительные технологии. 2010. Т. 15, №4. С. 47–57.
3. Ryzhkov I., Shevtsova V. On thermal diffusion and convection in multicomponent mixtures with application to the thermogravitational column // Physics of fluids. 2007. V. 19. Is. 027101.

## ON THE CONVECTION OF A BINARY MIXTURE IN A VERTICAL LAYER UNDER SORET EFFECT AND NON-LINEAR BUOYANCY FORCE

*I. V. Stepanova*

The problem of a steady thermodiffusion flow of a binary mixture in a vertical layer in the case when the equation of state is a nonlinear function of temperature and concentration is investigated. An invariant solution is constructed and studied. Differences in the behavior of the velocity and density are detected as compared to the Oberbeck – Boussinesq approximation depending on the nature of the nonlinearity.

*Keywords:* binary mixture, thermodiffusion, buoyancy force, invariant solution.