УДК 519.634

МЕТОД КОНЕЧНЫХ СУПЕРЭЛЕМЕНТОВ В ЗАДАЧАХ О ВЯЗКИХ НЕСЖИМАЕМЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Л.Г. Страховская

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

strakh@kiam.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Построены схемы высокого порядка точности методом конечных суперэлеменов на треугольной неструктурированной сетке для расчета течений вязкой несжимаемой жидкости с преобладанием конвективного переноса. Проведены расчеты стандартных тестовых задач для уравнений конвекции–диффузии и уравнений Навье – Стокса.

Ключевые слова: метод конечных суперэлеменов, уравнение Навье – Стокса, треугольная неструктурированная сетка, схема высокого порядка.

Метод конечных суперэлементов (МКСЭ) был предложен в 1976 году для решения краевых эллиптических задач, в которых локальные сингулярности сконцентрированы в узких подобластях рассчитываемой области. Он применялся для численного моделирования нейтронно-физических процессов в ядерных реакторах [1] и для решения задач теории упругости. МКСЭ – это проекционный метод, использующий идеи МКЭ, но отличающийся от стандартных конструкций МКЭ следующим: 1) требуется выполнение вариационного уравнения в пространстве следов искомого решения на пространственной сетке; 2) базисные функции строятся как решение исходного уравнения со специальными краевыми условиями; 3) используются сетки с относительно большим шагом h по пространству, но расчет базисных функций учитывает мелкомасштабные неоднородности внутри ячейки, которые играют важную роль в рассчитываемых процессах. Увеличение точности решения делается за счет повышения степени аппроксимирующих функций (p-аппроксимация).

В настоящее время метод развивается для решения задач гидродинамики с большими числами Рейнольдса. Сложности приближенного решения таких задач связаны с наличием пограничных слоев, ударных волн и тангенциальных разрывов. Интерес представляют двухфазные течения, пока без перемешивания, с движущимся интерфейсом, его положение определяется методом функции уровня [2].

В двумерной области Ω течение вязкой несжимаемой жидкости описывается уравнениями Навье–Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nabla\cdot\tau(\mathbf{u}) + \mathbf{g}, \qquad \nabla\cdot\mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

$\mathbf{u}$ – вектор скорости, ρ – плотность, p – давление, μ – коэффициент кинематической вязкости, $\mathbf{g}$ – вектор ускорения свободного падения, $\tau(\mathbf{u}) = \mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T)$ – тензор вязких напряжений. Задаются начальные условия, краевые условия Дирихле на основной части внешней границы $\partial\Omega' \subset \partial\Omega$ и тензор напряжений на выходной части границы $\partial\Omega\backslash\partial\Omega'$:

$$\mathbf{u}(x,y,0) = \mathbf{u}_0(x,y), \quad \mathbf{u}\big|_{\partial\Omega'} = \mathbf{u}_0(x,y)\big|_{\partial\Omega'},$$
$$\tau\mathbf{n} - p\mathbf{n} = p_0\mathbf{n} \text{ на } \partial\Omega\setminus\partial\Omega'.$$

В области Ω вводится треугольная неструктурированная сетка. Нестационарная система (1) решается по неявной схеме. Для решения нелинейной задачи на верхнем слое делается линеаризация. Линеаризованную дифференциальную систему запишем в дивергентной форме:

$$L(\varepsilon)\mathbf{u} \equiv \frac{\partial \mathbf{f}_1(\mathbf{u})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_2(\mathbf{u})}{\partial y} = \mathbf{f}. \tag{2}$$

Обобщенное решение определяется из уравнений

$$B(\mathbf{u},\mathbf{w}) = (\mathbf{f},\mathbf{w}),$$

где

$$B(\mathbf{u},\mathbf{w}) =$$
$$= -\int_{\omega_k}\left(\mathbf{f}_1\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x} + \mathbf{f}_2\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial x}\right)d\omega + \int_{\partial\omega_k}(\mathbf{f}_1 n_x + \mathbf{f}_2 n_x)\mathbf{w}\,ds.$$

Здесь $\mathbf{w} = (w_1, w_2, w_3)$ – произвольная гладкая вектор-функция с носителем $\omega_k \subset \Omega$ без требования обращения в ноль на $\partial\omega_k$, $\mathbf{n} = (n_x, n_y)$ – внешняя нормаль к $\partial\omega_k$.

В каждой треугольной ячейке T вводится локальная сетка и рассчитываются векторные базисные функции, которые должны удовлетворять системе (2) в «классическом» смысле. На ∂T задаются краевые условия – полиномы степени $N = 1, 2, 3, 4, 5$, образующие полиномиальный или иерархический базис на ∂T,

$$L(\varepsilon)\varphi_j = 0, \quad \varphi_j\big|_{\partial T} = \tilde{\varphi}_j, \quad j = 1, 2, ..., J;$$

$$L(\varepsilon)\varphi_0 = \mathbf{f}, \quad \varphi_0\big|_{\partial T} = 0,$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \sum_{m=1}^{3}\sum_{j} u_j^m \varphi_j^m \text{ в } T.$$

Так же, как в МКЭ, формируется матрица жесткости, система линейных алгебраических уравнений разрешается относительно неизвестных u_k^m. Делается несколько итераций по нелинейным членам и переход на следующий шаг по времени.

МКСЭ применялся для расчета многих задач гидродинамики. Проведена серия расчетов модельных задач для уравнения конвекции-диффузии [3], в которых конвективный перенос преобладает: задача Прандтля, задача с разрывными граничными данными, задача с криволинейным внутренним слоем, задача с точным экспоненциальным решением. Использовался вариант МКСЭ по конструкции, близкий методу RFB (Residual-free Bubbles). Он показал результаты (точность, устойчивость) такие же, как и другие стабилизированные методы (GLS, SUPG, RFB).

Возможности МКСЭ изучались на стандартных тестах для уравнений Навье–Стокса [4]: задача о течении в канале за ступенькой, течение в каверне с движущейся верхней стенкой, течение в распределительной камере с тремя выходными отверстиями, задача о тепловой конвекции, модельная задача с известным точным решением. В этих задачах существуют подобласти, в которых решение сингулярное, возникают локальные вихри и внутренние слои при больших числах Рейнольдса. Во всех случаях МКСЭ позволял выбирать шаг сетки в ~50 раз крупнее, чем в конечно-разностных методах или стабилизированных МКЭ, используемых другими авторами.

В задачах о течении в канале за уступом и течении в распределительной камере с тремя выходными отверстиями изучалось влияние на решение краевых условий на выходных границах [5]. Моделировалось 3 типа условий: 1) условие Дирихле, 2) условие Неймана, 3) условие на тензор напряжений. Для первой задачи подходят условия 2) и 3), для второй – лучше условие 3).

Выполнены расчеты течения двухфазной жидкости в одножидкостной модели, которая в стационарном варианте сводится к задаче Стокса с разрывными коэффициентами [6]. В нестационарных задачах к уравнениям Навье–Стокса добавляется уравнение переноса функции уровня [7].

Численные эксперименты показали, что с помощью МКСЭ построены схемы высокого порядка точности для расчета неоднородных течений вязкой несжимаемой жидкости на неструктурированных неразнесенных сетках с «шагом» в 20–50 раз большим, чем в стабилизированных МКЭ. Специальное построение трехкомпонентных (две скорости и давление) векторных базисных функций как решений линеаризованной системы Навье – Стокса позволяет использовать общую сетку для скорости и давления, учитывает сложное поведение решения внутри ячейки, позволяет преодолеть условие LBB и стабилизирует метод, уменьшая число обусловленности матрицы жесткости. Метод хорошо распараллеливается: расчет базиса в ячейке может осуществляться на отдельном процессоре.

Список литературы

1. Страховская Л.Г., Федоренко Р.П. // Ж. вычислит. матем. и математич. физ. 1979. Т. 19, №4. С. 950–960.

2. Osher S.J., Fedkiw R.P. Level set method and dynamic implicit surfaces. N.Y.: Springer, 2003. 273 p.

3. Жуков В.Т., Страховская Л.Г., Федоренко Р.П., Феодоритова О.Б. // Ж. вычислит. матем. и математич. физ. 2002. Т. 42, №2. С. 223–235.

4. Страховская Л.Г. // Ж. вычислит. матем. и математич. физ. 2009. Т. 49, №1. С. 123–136.

5. Страховская Л.Г. // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Междунар. науч. конф., посвящен. памяти акад. А.А. Самарского в связи с 90-летием со дня рождения. Москва, 16–18 июня 2009 г.

6. Милютин Д.С., Страховская Л.Г. Препринт №81. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2009.

7. Страховская Л.Г. Препринт №83. ИПМ им. М.В. Келдыша РАН. М., 2010.

A FINITE SUPERELEMENT METHOD IN THE PROBLEMS OF VISCOUS INCOMPRESSIBLE FLOWS

L.G. Strakhovskaya

High-order schemes are constructed for analyzing viscous incompressible convection-dominated flows on a triangular unstructured mesh by the finite superelement method (FSEM). The standard test problems for the convection-diffusion equation and Navier – Stokes equation have been analyzed.

Keywords: finite superelement method, Navier-Stokes equation, triangular unstructured mesh, high-order scheme.