УДК 532.3

ДВИЖЕНИЕ ПОГРУЖЕННОГО ТЕЛА В ЖИДКОСТИ ПОД ЛЕДЯНЫМ ПОКРОВОМ

И.В. Стурова

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

sturova@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Решена задача о равномерном горизонтальном движении сферы в слое жидкости, верхняя граница которого является ледяным покровом. Использован метод мультипольных разложений в рамках линейной потенциальной теории волн. Определены гидродинамические нагрузки, действующие на тело, а также распределения прогибов и напряжений в ледяном покрове.

Ключевые слова: линейная теория волн, ледяной покров, погруженное тело, равномерное движение, гидродинамическая нагрузка, изгибно-гравитационные волны.

Введение

В связи с возрастающей активностью в освоении полярных районов Мирового океана возникает необходимость исследования процессов волнообразования в сплошном ледяном покрове, вызванных различными источниками возмущений. Ранее достаточно подробно была исследована задача о движении внешней нагрузки по льду (см. обзоры [1, 2]). Однако воздействие погруженного тела и влияние ледяного покрова на его гидродинамические характеристики еще мало изучено. Лишь в последние годы появились работы [3, 4], в которых определены коэффициенты присоединенной массы и демпфирования при колебаниях погруженной сферы в однородной и двухслойной жидкости.

Математическая формулировка

Рассмотрим волновое движение, создаваемое равномерно движущейся со скоростью U в горизонтальном направлении погруженной сферой радиуса a. Жидкость предполагается невязкой, несжимаемой, бесконечно глубокой, а ее движение потенциальным. Введем подвижную систему координат (x, y, z), связанную со сферой, так что плоскость $z = 0$ совпадает с невозмущенной верхней границей жидкости и ось z направлена вертикально вверх (рис. 1). Центр сферы помещен в точке $x = y = 0$, $z = -h$ $(h > 0)$. Определим также сферическую систему координат (r, θ, β), начало которой помещено в центре сферы. Две введенные системы координат связаны соотношениями: $x = r\sin\theta\cos\beta$, $y = r\sin\theta\sin\beta$, $z = r\cos\theta - h$. Ледяной покров рассматривается как тонкая упругая пластина, находящаяся в состоянии равномерного растяжения или сжатия. Потенциал скоростей движения жидкости представим в виде $\Phi(x, y, z) = -U[x - \varphi(x, y, z)]$, где φ – стационарный потенциал, соответствующий движению сферы с единичной скоростью.

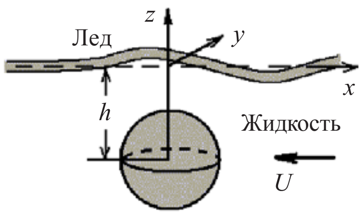

Рис. 1

Уравнение для малых вертикальных прогибов ледяного покрова $\zeta(x, y)$ имеет вид

$$D\Delta_2^2\zeta + Q\Delta_2\zeta + MU^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} - \rho U\frac{\partial\varphi}{\partial x} +$$
$$+\rho g\zeta = 0 \quad (z = 0), \quad \Delta_2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \qquad (1)$$

где $D = Eh_1^3/[12(1-\nu^2)]$, $M = \rho_1 h_1$; E, ν, Q, ρ_1, h_1 – модуль Юнга, коэффициент Пуассона, усилие сжатия $(Q > 0)$ или растяжения $(Q < 0)$, плотность и толщина ледяного покрова соответственно; ρ – плотность жидкости; g – ускорение силы тяжести. В частном случае $D = Q = 0$ верхняя граница жидкости представляет собой битый лед, а если при этом и $M = 0$, то имеем случай обычной свободной поверхности.

Потенциал скоростей $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (-\infty < x,\ y < \infty,\ z < 0), \quad \Delta \equiv \Delta_2 + \partial^2/\partial z^2,$$

и следующим граничным условиям:

$$\partial\zeta/\partial x = -\partial\varphi/\partial z \quad (z=0), \tag{2}$$

$$\partial\varphi/\partial n = n_x \quad (r=a), \tag{3}$$

где **n** – внутренняя нормаль к телу и n_x – ее компонента в направлении оси x. В дальнем поле следует потребовать выполнения условия излучения, которое означает, что распространяющиеся впереди тела волны могут быть только в том случае, когда их групповая скорость больше скорости тела, в противном случае волновые движения существуют только за телом.

Используя метод мультипольных разложений [5], основанный на функциях Лежандра P_n^m, решение для потенциала скоростей представим в виде

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n} A_n^m \left[\frac{a^{n+1}}{r^{n+1}} P_n^m(\cos\theta)\cos m\beta + F_n^m(r,\theta,\beta)\right], \tag{4}$$

где первый член в квадратных скобках относится к решению задачи о движении сферы в безграничной жидкости, а второй член введен для удовлетворения граничным условиям (2), (3),

$$F_n^m = \frac{a^{n+1} i^m}{2\pi(n-m)!} \times$$

$$\times \int_L \int_{-\pi}^{\pi} A(k,\gamma) k^n \cos m\gamma e^{kz} e^{ik(x\cos\gamma + y\sin\gamma)} d\gamma\, dk,$$

$$A(k,\gamma) = e^{-kh} T(k,\gamma)/Z(k,\gamma),$$

$$T(k,\gamma) = Z(k,\gamma) + 2\rho U^2 k \cos^2\gamma,$$

$$Z(k,\gamma) = Dk^4 - Qk^2 - U^2 k\cos\gamma(\rho + Mk) + \rho g.$$

Контур интегрирования L проходит от нуля до бесконечности. При некоторых ограничениях на величину Q уравнение $Z(k,\gamma) = 0$ имеет два вещественных положительных корня k_1 и k_2 ($k_1 < k_2$) только при $U|\cos\gamma| > U_m$, где U_m – минимальная фазовая скорость изгибно-гравитационных волн. Хорошо известно (см., например, [1]), что групповая скорость этих волн больше их фазовой скорости для коротких волн и меньше для длинных волн. Фазовая и групповая скорости совпадают при U_m, где

$$U_m = \sqrt{(Dk_0^4 - Qk_0^2 + \rho g)/[k_0(\rho + Mk_0)]}$$

и k_0 - положительный корень уравнения

$$Dk_0^4(2Mk_0/\rho + 3) - Qk_0^2 - 2Mgk_0 - \rho g = 0.$$

Согласно условию излучения при $|\gamma| < \pi/2$ ($> \pi/2$), особенность в точке $k = k_1$ обходится сверху (снизу), в точке $k = k_2$ – снизу (сверху). Из условия непротекания на теле (3) получим систему линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов A_n^m в (4). Вычислены гидродинамические нагрузки (волновое сопротивление и подъемная сила), а также распределения прогибов и напряжений в ледяном покрове в зависимости от скорости движения тела, толщины льда и величины сжимающих или растягивающих усилий.

Работа выполнена в рамках Программы Президиума РАН №20.4.

Список литературы

1. Squire V.A. et al. Moving loads on ice plates. Dordrecht: Kluwer, 1987.

2. Bukatov A.E., Zharkov V.V. // Intern. J. Offshore and Polar Eng. 1997. V. 7, No 1. P. 1–12.

3. Das D., Mandal B.N. // Arch. Appl. Mech. 2008. V. 78, No 8. P. 649–661.

4. Mohapatra S., Bora S.N. // J. Adv. Res. Appl. Math. 2010. V. 2, No 1. P. 46–63.

5. Wu G.X. // Proc. R. Soc. Lond. A. 1995. V. 448, No 1932. P. 29–54.

MOTION OF A BODY SUBMERGED INTO A FLUID WITH AN ICE-COVER

I.V. Sturova

The problem of uniform horizontal motion of a sphere in a fluid under an ice-cover is analyzed. The multipole expansion method is used in the framework of the linear wave theory of the potential flow. The hydrodynamic loads acting on the body along with the ice-cover deformations and the longitudinal strains are determined.

Keywords: linear wave theory, ice-cover, submerged body, uniform motion, hydrodynamic load, flexural-gravity waves.