УДК 533.6

ЭВОЛЮЦИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ВОЛН В ГАЗЕ И КВАЗИГАЗОВЫХ СРЕДАХ

А.В. Аксенов

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

aksenov.av@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Получены общие решения системы уравнений одномерной газовой динамики в специальных случаях, когда показатель политропы $\gamma = 5/3;\ 7/5$. Для рассматриваемых случаев построены периодические по пространственной переменной точные решения. Получены зависимости времени наступления градиентной катастрофы от начальной амплитуды волны. Приведен обзор полученных ранее автором результатов общих свойств основных уравнений движения квазигазовых сред. Получено условие периодичности по пространственной переменной решений этой системы уравнений. Предложена аналогия с системой уравнений одномерной газовой динамики. Для специальных типов квазигазовых сред построены и исследованы точные периодические по пространственной переменной решения.

Ключевые слова: градиентная катастрофа, переменные годографа, квазигазовые среды.

Периодические волны в газе

Рассмотрим систему уравнений, описывающую изоэнтропическое одномерное неустановившееся движение газа со степенной зависимостью давления от плотности [1]. Запишем ее в следующем виде:

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-\lambda\frac{\partial \rho^{1/\lambda}}{\partial x},\\ \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0,\quad \lambda=\frac{1}{\gamma-1}.\end{gathered}\tag{1}$$

Здесь t – время, x – пространственная переменная, u – скорость, ρ ($\rho > 0$) – плотность, γ ($\gamma > 1$) – показатель степени (показатель политропы). Система уравнений (1) записана в безразмерных переменных. В качестве характерных размерных величин взяты характерная длина l, характерная плотность газа ρ_0, характерная скорость $u_0=\sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$, равная скорости звука в газе с плотностью ρ_0 и давлением p_0 (давление p_0 соответствует плотности ρ_0), и характерное время $t_0 = l/u_0$.

Система уравнений (1) линеаризуется в плоскости годографа. Линеаризованная система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial x}{\partial r}=2\lambda z\frac{\partial t}{\partial r}-r\frac{\partial t}{\partial z},\\ \frac{\partial x}{\partial z}=-r\frac{\partial t}{\partial r}+2\lambda z\frac{\partial t}{\partial z},\end{gathered}\tag{2}$$

где $r = \rho^{(\gamma-1)/2}$, $z = (\gamma - 1)u/2$. Условием совместности системы уравнений (2) является уравнение Эйлера – Пуассона – Дарбу:

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{2\lambda+1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}-\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0.\tag{3}$$

В работе [2] были получены все линейные дифференциальные соотношения первого порядка вида

$$t^{(\beta)}=A(r,z)\frac{\partial t^{(\alpha)}}{\partial r}+B(r,z)\frac{\partial t^{(\alpha)}}{\partial z}+C(r,z)t^{(\alpha)}$$

между решениями $t = t^{(\alpha)}(r, z)$, $t = t^{(\beta)}(r, z)$ класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу (3). На основании полученных соотношений в работе получены общие решения системы уравнений (1) в специальных случаях, когда показатель политропы $\gamma = 5/3;\ 7/5$. Для рассматриваемых случаев решена задача о периодическом по пространственной переменной движении газа со следующими начальными периодическими по пространственной переменной условиями

$$r\big|_{t=0}=1+\varepsilon\cos(x),\quad z\big|_{t=0}=0,$$

где ε ($0 < \varepsilon < 1$) – произвольная постоянная. Получены зависимости времени наступления градиентной катастрофы от начальной амплитуды волны.

Для произвольных значений показателя степени γ получено асимптотическое решение системы уравнений с периодическими начальными условиями, где малым параметром является начальная безразмерная амплитуда волны.

Эволюция периодических волн в квазигазовых средах

Рассмотрим систему уравнений, описывающую эволюцию возмущений в квазигазовых средах [3]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\lambda\frac{\partial \rho^{1/\lambda}}{\partial x},\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t}+\frac{\partial(\rho u)}{\partial x}=0. \tag{4}$$

Система уравнений (4) записана в безразмерных переменных. Здесь t – время, x – пространственная переменная, u – скорость, ρ ($\rho > 0$) – плотность.

К исследованию этой системы уравнений могут быть сведены при использовании слабонелинейного длинноволнового приближения многие задачи механики и физики. Известны более пятидесяти таких сред (например, опрокинутая мелкая вода, гравитирующий газовый слой, перетяжки на плазменном пинче и др.) [3]. В квазигазовых средах в линейном приближении малые возмущения при всех значениях волнового числа растут по времени экспоненциально.

Система уравнений (4) отличается от системы уравнений (1) только знаком правой части первого уравнения. Аналогично изложенному, система уравнений (4) линеаризуется преобразованием годографа, и ее решение сводится к решению эллиптического уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу

$$\frac{\partial^2 t}{\partial r^2}+\frac{2\lambda+1}{r}\frac{\partial t}{\partial r}+\frac{\partial^2 t}{\partial z^2}=0. \tag{5}$$

Система уравнений (4), описывающая движение квазигазовых сред, сводится к системе уравнений одномерной газовой динамики следующей комплексной заменой переменных: $\rho \to \varsigma$, $u \to iu$, $x \to ix$, $t \to t$ ($i^2=-1$).

Приведен обзор результатов, полученных автором ранее и посвященных общим свойствам основных уравнений, описывающих движение абсолютно неустойчивых сред (условие периодичности решений по пространственной переменной; симметрия основных уравнений; инвариантные фундаментальные решения эллиптического уравнения Эйлера – Пуассона – Дарбу). Для специальных типов квазигазовых сред построены точные периодические по пространственной переменной решения. Показано, что эти решения, сколь угодно мало отличающиеся друг от друга в начальный момент времени, имеют различные финальные стадии. Эти решения существуют конечное время и являются примерами режимов с обострением [4] для эллиптических систем уравнений.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант №09-01-00610.

Список литературы

1. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М.: ИЛ, 1950.

2. Аксенов А.В. Симметрии и соотношения между решениями класса уравнений Эйлера – Пуассона – Дарбу // Докл. РАН. 2001. Т. 381, №2. С. 176–179.

3. Жданов В.К., Трубников Б.А. Квазигазовые неустойчивые среды. М.: Наука, 1991.

4. Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П. Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений. М.: Наука, 1987.

THE EVOLUTION OF PERIODIC WAVES IN GAS MEDIA AND KVAZIGAZOVYH

A.V. Aksenov

General solutions of the equations of one-dimensional gas motion were obtained for the special cases where the exponent is $\gamma = 5/3$, $7/5$. For these cases the periodical space variable solutions were constructed. The dependences of the time of the gradient catastrophe on the initial wave amplitude were obtained. A review of the results obtained by the author on the general properties of the basic equations describing the motion of quasi-gas media is presented in the article. The condition of periodicity of solutions of these equations for the space variable was obtained. The analogy with the system of equations for one-dimensional gas dynamics was suggested. For special types of quasi-gas media the exact periodic space variable solutions were constructed and examined.

Keywords: gradient catastrophe, the variables hodograph, quasi-gaseous media.