

УДК 532.5:533.6.011.5

**ОСОБЕННОСТИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ АВТОМОДЕЛЬНЫХ, СТАЦИОНАРНЫХ  
ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ И ДВУМЕРНЫХ КОНИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ  
С УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ**

© 2011 г.

*Х.Ф. Валиев<sup>1,2</sup>, А.Н. Крайко<sup>1</sup>*<sup>1</sup>Центральный институт авиационного моторостроения им. П.И. Баранова, Москва<sup>2</sup>Московский физико-технический институт (технический университет)

akraiko@ciam.ru

*Поступила в редакцию 16.05.2011*

Описаны особенности нестационарных автомодельных, сверхзвуковых осесимметричных и двумерных конических течений идеального (невязкого и нетеплопроводного) газа с ударными волнами (УВ). В автомодельных задачах о схлопывании сферической полости и об отражении УВ от центра или оси симметрии (далее – центра симметрии – ЦС) допускается уменьшение показателя адиабаты газа  $\gamma$  в идущей от ЦС («отраженной») УВ. Если его уменьшение невелико, то структура течения качественно не изменится. При заметном уменьшении этого показателя в окрестности ЦС возникает пустая полость, отраженная УВ конечной интенсивности движется со скоростью звука, температура газа на границе и в полости бесконечна, а убывающее со временем давление отлично от нуля. В некоторый момент энтропия на отраженной УВ не увеличивается. С этого момента УВ, оставаясь изэнтропической (при наборе интенсивности), становится причиной нарушения автомодельности. В сверхзвуковых струях изучено усиление слабых УВ, идущих к оси симметрии, и их нерегулярное отражение от оси. В приближении нелинейной акустики в противоречии с результатами численного интегрирования уравнений Эйлера усиление слабых УВ не зависит от  $\gamma$  и числа Маха потока. Построена нелинейная теория, лишенная этого недостатка. Для конических течений, возникающих при сверхзвуковом обтекании угловых конфигураций из пересекающихся полуплоскостей, показано, что на конусе Маха к равномерному коническому сверхзвуковому потоку могут непрерывно примыкать течения и разрежения, и сжатия. Ошибочное утверждение о невозможности второго стало основанием для введения так называемых «висящих» скачков.

*Ключевые слова:* показатель адиабаты, автомодельное течение, «висящий» скачок, ударная волна у оси симметрии.

В отличие от классических постановок [1–9], в автомодельных задачах о схлопывании пустой сферической полости и в задаче Гудерля об отражении УВ от центра или оси симметрии (далее – центра симметрии – ЦС) допускается изменение в распространяющейся от ЦС («отраженной») УВ отношения удельных теплоемкостей (показателя адиабаты) совершенного газа  $\gamma$ . В обеих задачах при временах, близких к моменту отражения, в решениях с увеличивающимся показателем адиабаты ( $\gamma_+ > \gamma_-$ ) энтропия на отраженной УВ уменьшается (в момент отражения энтропийная функция  $\chi \equiv p/\rho^\gamma$  уменьшается до нуля;  $p$  – давление,  $\rho$  – плотность). По этой причине в данных задачах допустимо только уменьшение  $\gamma$ . В задаче Гудерля уменьшение  $\gamma$  приближенно моделирует различные физико-химические процессы (например, диссоциацию и ионизацию), а в задаче о схлопывании полости – фазовый переход (превращение жидкости в пар). Если показатель  $\gamma_+$  по сравнению с  $\gamma_-$  уменьшается не

сильно, то структура течения не претерпевает качественных изменений. При заметном уменьшении  $\gamma_+$ , зависящем от  $\gamma_-$  и от индекса симметрии  $\nu = 2$  и 3 в цилиндрическом сферическом случаях, в окрестности ЦС возникает расширяющаяся пустая полость, а отраженная УВ конечной интенсивности движется по газу перед ней со скоростью звука. Температура газа на границе полости бесконечна («граничные» частицы проходят через УВ в начале координат, где энтропия за УВ бесконечна). Из-за этого давление в полости – отличная от нуля, монотонно убывающая функция времени. В некоторый конечный момент времени  $t = t_*$  энтропия за отраженной УВ  $s_+$  и перед ней  $s_-$  оказываются равными, а при  $t = t_*$  в автомодельном решении отношение  $s_+/s_-$  становится меньше единицы, что физически недопустимо. После этого (при  $t > t_*$ ) набирающая интенсивность, но остающаяся локально изэнтропической ( $s_+/s_- = 1$ ) отраженная УВ становится причиной нарушения автомодельности.

В осесимметричных сверхзвуковых струях изучено усиление слабых УВ, идущих к оси симметрии. В приближении нелинейной акустики в противоречии с результатами численного интегрирования уравнений Эйлера их усиление не зависит от показателя адиабаты газа и числа Маха набегающего потока  $M_0$ . Построена более точная нелинейная теория, лишенная этого недостатка. В ней усиление УВ находится из решения задачи Коши для двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Границы применимости развитой теории находятся при их численном интегрировании. Наряду с аналитическим и численным изучением усиления слабых УВ, численным интегрированием уравнений Эйлера на сильно измельчающихся к оси симметрии сетках определена зависимость размеров диска Маха от  $M_0$  и от начальной интенсивности слабой УВ. Полученные результаты объясняют парадокс «регулярного отражения», которое для изначально слабых УВ, вроде бы, наблюдается в экспериментах и в «сквозных» расчетах, а, с другой стороны, теоретически невозможно. Действительно, при регулярном отражении в лежащую на оси симметрии точку отражения  $o$  приходит  $C^-$ -характеристика, условие совместности вдоль которой имеет вид [7, 9]:

$$d\theta - \frac{ctg\mu}{\rho V^2} dp - \frac{\sin\theta \sin\mu}{\sin(\theta - \mu)} \frac{dr}{r} = 0, \quad (1)$$

где  $\theta$  – угол наклона вектора скорости  $\mathbf{V}$  к оси струи,  $r$  – расстояние до нее,  $V = |\mathbf{V}|$  и  $\mu$  – угол Маха. За косой УВ угол  $\theta \neq 0$ , и коэффициент перед  $dr/r$  при приближении к оси струи – знакоопределенная функция. Поэтому, проинтегрировав левую часть уравнения (1) от произвольной точки  $o^-$  до точки  $o$ , получим неограниченный интеграл от слагаемого с  $dr/r$ , который не может скомпенсировать конечные интегралы от двух первых слагаемых. Следовательно, такая  $C^-$ -характеристика не доходит до оси симметрии, что возможно при нерегулярном отражении с образованием диска Маха. Согласно выполненным расчетам, пока начальная (при  $r=r_a=1$ ) интенсивность УВ мала, размер диска Маха пренебрежимо мал ( $r_{DM} \ll r_a=1$ ). Согласно [10], для конических течений, возникающих при сверхзвуковом обтекании угловых конфигураций из пересекающихся полуплоскостей (например,  $V$ -образных крыльев), на линии параболичности (ЛП) – следе конуса Маха

в конических переменных – к равномерному конически сверхзвуковому потоку могут непрерывно примыкать конически дозвуковые течения разрежения и не могут – конически дозвуковые течения сжатия. Опираясь на это утверждение и на полученные при численном расчете конических течений еле заметные повышения давления в конически дозвуковой окрестности ЛП, авторы [11] ввели новый тип УВ – заканчивающиеся на ЛП «висящие» скачки. Установлена ошибочность процитированного утверждения и как, следствие этого, – отсутствие оснований для введения скачков указанного типа.

Авторы признательны В.Л. Борщу, К.С. Пьянкову и Н.И. Тилляевой за полезные обсуждения и помощь в проведении расчетов.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 08-01-00178, и Аналитической ведомственной целевой программы развития научного потенциала высшей школы (2.1.1/200).*

#### Список литературы

1. Guderley G. Starke kugelige und zylindrische Verdichtungsstöße in der Nähe des Kugelmittelpunktes bzw. der Zylinderachse // Luftfahrtforschung. 1942. Bd. 19. Lfg. 9. S. 302–312.
2. Брушлинский К.В., Каждан Я.М. Об автомоделных решениях некоторых задач газовой динамики // Успехи матем. наук. 1963. Т. 18. Вып. 2 (110). С. 3–23.
3. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. М.: Мир, 1977. 622 с.
4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
5. Lazarus R.B. Self-similar solutions for converging shocks and collapsing cavities // SIAM J. Numer. Anal. 1981. V. 18, No 2. P. 316–371.
6. Meyer-ter-Vehn J., Schalk C. Selfsimilar spherical compression waves in gas dynamics // Zeitschrift für naturforschung. 1982. Bd. 37a. H. 8. S. 955–969.
7. Крайко А.Н. Краткий курс теоретической газовой динамики. М.: МФТИ, 2007. 299 с.
8. Валиев Х.Ф. Отражение ударной волны от центра или оси симметрии при показателях адиабаты от 1.2 до 3 // ПММ. 2009. Т. 73. Вып. 3. С. 397–407.
9. Крайко А.Н. Теоретическая газовая динамика: классика и современность. М.: ТОРУС-ПРЕСС, 2010. 440 с.
10. Булах Б.М. Нелинейные конические течения. М.: Наука, 1970. 343 с.
11. Остапенко Н.А., Чулков А.А. О висящих скачках уплотнения в конических течениях газа при наличии маховской конфигурации ударных волн // Изв. РАН. МЖГ. 2007. № 2. С. 181–193.

**FEATURES OF NON-STATIONARY SELF-SIMILAR, STATIONARY AXISYMMETRIC AND TWO-DIMENSIONAL CONIC FLOWS WITH SHOCK WAVES***Kh.F. Valiyev, A.N. Kraiko*

Features of non-stationary self-similar, supersonic axisymmetric and two-dimensional conic flows of ideal (non-viscous and non-heat-conducting) gas with shock waves (SW) are described. Self-similar one-dimensional non-stationary problems are considered in the assumption of change of adiabatic exponent on SW, coming («reflected») from the centre or an axis of symmetry (further – symmetry centre SC) or from a plane. Problems of the collapse of an empty spherical cavity, of reflection of strong SW from SC and a simpler problem with self-similarity exponent unity are considered. In the assumption of adiabatic exponent growth self-similar solutions of the two first problems are rejected because of entropy reduction from the moment of SW reflection. In the assumption of adiabatic exponent reduction the solution of these problems for the same reason become unsuitable only after the lapse of finite time. Until the reduction of adiabatic exponent has reached some threshold, the structure of the self-similar solution does not undergo qualitative changes. Beyond the specified threshold, the self-similar solution is possible, when cylindrical or spherical piston extends under the special law from the moment of the reflection from SC. In the absence of the piston the flow behind the reflected wave is no more self-similar. In stagnating flat flows, modes with SW adjunction to a centered rarefaction wave from different sides are possible. In supersonic streams going to a symmetry axis weak SW strengthening and their irregular reflection from the axis is studied. In the approach of nonlinear acoustics, in contradiction with results of Euler equations, numerical integration strengthening of weak SW does not depend on  $\gamma$  and Mach number of the flow. A nonlinear theory is constructed which lacks this deficiency. It is shown for conic flows arising for supersonic flows over angular configurations of crossing semi-planes, that both rarefaction and compression flows can continuously adjoin to the conically supersonic uniform flow on a Mach cone. The erroneous statement about the impossibility of the second became the basis for the introduction of the so-called «hanging» discontinuities.

*Keywords:* adiabatic exponent, self-similar flow, «hanging» discontinuity, shock wave at symmetry axis.