УДК 536.242

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ СФЕРИЧЕСКИХ ЧАСТИЦ В СРЕДЕ С ПОСТОЯННЫМ ГРАДИЕНТОМ ТЕМПЕРАТУРЫ

А.О. Сыромясов

Мордовский госуниверситет им. Н.П. Огарева, Саранск

syal1@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Две сферические частицы произвольных радиусов помещены в сплошную среду, в которой (на бесконечности) поддерживается постоянный градиент температуры. Теплопроводности сфер и среды произвольны. Методом мультипольного разложения найдено распределение температуры вне и внутри частиц. Показано, что система из двух сфер обладает дипольными свойствами.

Ключевые слова: термодинамическое взаимодействие, мультипольное разложение, сферическая частица, градиент температуры.

Постановка задачи

Две неподвижные частицы с радиусами a_1, a_2 и теплопроводностями κ_1, κ_2 соответственно помещены в среду с теплопроводностью κ. Центры частиц разделены вектором $\mathbf{r}$. Поскольку сферы не перекрываются, то $r \ge a_1 + a_2$. На бесконечности задан постоянный градиент температуры $\mathbf{T}$ (рис. 1).

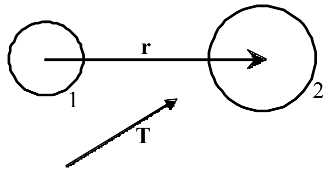

Рис. 1

В начале координат температура $T = T_0$. Далее вектор $\mathbf{x}$ задает положение произвольной точки относительно начала координат, векторы $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$ – положения центров частиц, $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}$. Требуется найти распределение температуры вне и внутри частиц (обозначим соответствующие функции через T_f и T_p).

Для одиночной частицы эта задача поставлена в [1]. Искомые поля удовлетворяют уравнениям

$$\Delta T_f = 0, \quad \Delta T_p = 0 \qquad (1)$$

и следующим граничным условиям: на поверхности частиц непрерывны температура и тепловой поток,

$$T_f = T_p, \quad \kappa \frac{\partial T_f}{\partial n} = \kappa_N \frac{\partial T_p}{\partial n}, \qquad (2)$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{r}_N| = a_N,$$

на бесконечности возмущения, вызванные присутствием частиц, затухают:

$$T_f \to T_0 + T_j x_j, \quad |\mathbf{x}| \to \infty. \qquad (3)$$

Здесь и далее по повторяющимся индексам производится суммирование в пределах от 1 до 3. Индекс N означает номер частицы. Внутри частиц распределение температуры не должно иметь особенностей.

Мультипольное представление решения

Метод решения задачи основан на представлении гармонических функций в виде линейной комбинации мультиполей [2]:

$$L_0(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\mathbf{x}|}, \quad L_{i\ldots j}(\mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial x_i} \ldots \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right).$$

В силу (1), (3), распределение температуры вне частиц можно искать в виде

$$T_f = T_0 + T_j x_j + \sum_N [A_0^{\text{ext}}(N) L_0(\mathbf{x}) + H_j^{\text{ext}}(N) L_j(\mathbf{x} - \mathbf{r}_N) + F_{jk}^{\text{ext}}(N) L_{jk}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_N) + G_{jkl}^{\text{ext}}(N) L_{jkl}(\mathbf{x} - \mathbf{r}_N) + \ldots], \qquad (4)$$

а внутри N-й частицы, с учетом того, что в ее центре $T_p < \infty$, – в виде

$$T_p(N) = T_0 + T_j r_{Nj} + A_0^{\text{int}}(N) + H_j^{\text{int}}(N) L_j(\mathbf{y}) |\mathbf{y}|^3 + F_{jk}^{\text{int}}(N) L_{jk}(\mathbf{y}) |\mathbf{y}|^5 + G_{jkl}^{\text{int}}(N) L_{jkl}(\mathbf{y}) |\mathbf{y}|^7 + \ldots, \quad \mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{r}_N. \qquad (5)$$

Тензорные коэффициенты A_0, $\mathbf{H}$, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$ и т.д. зависят от векторов $\mathbf{r}$ и $\mathbf{T}$, поскольку они определяют геометрию задачи; при этом зависимость от **T** должна быть линейной.

Обозначим через **b** единичный вектор, сонаправленный с **r**, и выберем единичный вектор **c**⊥**b** так, что **T** раскладывается по **b** и **c**: **T** = $T^{\|}$**b** + $T^{\perp}$**c**. Тогда тензорные коэффициенты (вне зависимости от того, относятся ли они к разложению температуры вне или внутри частиц) имеют следующую структуру:

$$A_0 = AA \cdot T^{\|}, \quad H_j = HA \cdot T^{\|} b_j + HB \cdot T^{\perp} c_j,$$

$$F_{jk} = FA \cdot T^{\|} b_j b_k + FB \cdot T^{\perp}(c_j b_k + c_k b_j), \quad (6)$$

$$G_{jkl} = GA \cdot T^{\|} b_j b_k b_l +$$

$$+ GB \cdot T^{\perp}(c_j b_k b_l + c_k b_j b_l + c_l b_j b_k) \ldots$$

Так как коэффициенты сворачиваются с симметричными мультиполями, то и сами они должны быть симметричны. Поскольку задача линейна по **T**, вектор **c** входит во все выражения в степени не выше первой. Из векторов **T** и **r** скаляр образуется единственным образом: **T·r** = $T^{\|}r$, поэтому A_0 не содержит слагаемого с $T^{\perp}$.

Остается определить скалярные параметры $HA^{\text{ext}}(1)$, $HA^{\text{ext}}(2)$, $HA^{\text{int}}(1)$, $HA^{\text{int}}(2)$,… Для этого следует подставить выражения (4)–(6) в граничные условия (2). Эти величины были найдены в виде разложения по степеням параметра $\varepsilon = a_1/r < 1$ с точностью до ε^5:

$$AA^{\text{ext}}(1) = AA^{\text{ext}}(2) = 0,$$

$$AA^{\text{int}}(1) = \frac{a_2^3}{a_1^2}\frac{\kappa_2 - \kappa}{\kappa_2 + 2\kappa}\left(\varepsilon^2 + 2\frac{\kappa_1 - \kappa}{\kappa_1 + 2\kappa}\varepsilon^5\right),$$

$$AA^{\text{int}}(2) = -\frac{\kappa_1 - \kappa}{\kappa_1 + 2\kappa}\left(a_1\varepsilon^2 + 2\frac{a_2^3}{a_1^2}\frac{\kappa_1 - \kappa}{\kappa_1 + 2\kappa}\varepsilon^5\right),$$

$$HA^{\text{ext}}(1) = \frac{\kappa_1 - \kappa}{\kappa_1 + 2\kappa}\left(a_1^3 + 2a_2^3\frac{\kappa_2 - \kappa}{\kappa_2 + 2\kappa}\varepsilon^3\right),$$

$$HA^{\text{ext}}(2) = \frac{\kappa_2 - \kappa}{\kappa_2 + 2\kappa}\left(a_2^3 + 2a_2^3\frac{\kappa_1 - \kappa}{\kappa_1 + 2\kappa}\varepsilon^3\right), \ldots \quad (7)$$

Изложенный метод позволяет найти решение задачи с любой точностью по ε. Для этого требуется выписать выражения, содержащие мультиполи и тензорные коэффициенты более высокого порядка.

Анализ полученных результатов

Решение (7) обладает следующими свойствами. При $\varepsilon \to 0$ происходит переход к решению задачи об одиночной частице [1]:

$$HA^{\text{int}}(1) = HB^{\text{int}}(1) = -\frac{3\kappa}{\kappa_1 + 2\kappa},$$

$$HA^{\text{ext}}(1) = HB^{\text{ext}}(1) = \frac{\kappa_1 - \kappa}{\kappa_1 + 2\kappa}a_1^3.$$

Аналогичные выражения справедливы для коэффициентов, относящихся ко второй сфере; остальные коэффициенты равны нулю.

Если одна из частиц по своим термодинамическим характеристикам не отличается от несущей сплошной среды (например, $\kappa_2 = \kappa$), то полученное решение опять сводится к решению задачи, изложенной в [1].

Если сферы одинаковы, $a_1 = a_2 = a$, $\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_p$, то для распределения температуры вне и внутри частиц справедливы соотношения: $A(2) = -A(1)$, **H**(2) = **H**(1), **F**(2) = –**F**(1), **G**(2) = **G**(1). Аналогично [2], это означает, что мультипольная часть возмущенного поля температуры удовлетворяет тому же нечетному преобразованию, что и невозмущенное:

$$T_j(-x_j) = -T_j x_j \Rightarrow T_f(-\mathbf{x} + \mathbf{r}) = -T_f(\mathbf{x}),$$

$$T_p(-\mathbf{x} + \mathbf{r}) = -T_p(\mathbf{x}).$$

Можно показать, что среднее значение разности $T_p - T_0 - T_j r_{Nj}$ как по объему, так и по поверхности N-й сферы равно $T^{\|}AA^{\text{int}}(N)$. Это значит, что если градиент **T** приложен параллельно линии центров (или составляет с ней угол, отличный от прямого), то частицы могут разогреваться или охлаждаться относительно окружающей среды. Этот процесс обусловлен их термодинамическим взаимодействием: для одиночной сферы $AA^{\text{int}} = 0$. В частном случае одинаковых сфер из (7) следует, что

$$AA^{\text{int}}(1) = a\frac{\kappa_p - \kappa}{\kappa_f + 2\kappa}\left(\varepsilon^2 + 2\frac{\kappa_p - \kappa}{\kappa_p + 2\kappa}\varepsilon^5\right),$$

$$AA^{\text{int}}(2) = -AA^{\text{int}}(1).$$

Пусть $T^{\|} > 0$. Тогда при $\kappa_p > \kappa$ частица 1, расположенная в более холодной среде (см. рис. 1), будет разогреваться, а частица 2 – охлаждаться относительно среды на ту же температуру. Частицы образуют диполь, который ориентирован так, чтобы ослабить внешнее температурное поле, т.е. аналогично дипольным частицам внутри диэлектрика. Это объясняется тем, что при $\kappa_p > \kappa$ из (2) получается $\partial T_p / \partial n < \partial T_f / \partial n$, т.е. среда не успевает охладить частицу 1 и нагреть частицу 2. При $\kappa_p < \kappa$ ситуация противоположна.

Список литературы

1. Ландау Л.Д. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. Изд. 3-е, перераб. М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1986. 736 с.

2. Мартынов С.И. Взаимодействие частиц в суспензии. Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 1998. 135 с.

THERMODYNAMIC INTERACTION OF SPHERICAL PARTICLES IN A FLUID WITH A CONSTANT TEMPERATURE GRADIENT

A.O. Syromyasov

Two spherical particles of arbitrary radii are immersed in a continuum where (at infinity) the constant temperature gradient is maintained. Thermal conductivities of spheres and of the continuum are arbitrary, too. The temperature distribution inside and outside the particles is obtained by the method of multipole expansion. It is shown that the system of two spheres in such a continuum has dipole properties.

Keywords: thermodynamic interaction, multipole expansion, spherical particles, temperature gradient.