УДК 532.591

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В СЛОЕ ЖИДКОСТИ НА ПОРИСТОМ ОСНОВАНИИ

Н.Г. Тактаров, С.М. Миронова

Мордовский государственный педагогический институт им. М.Е. Евсевьева, Саранск

colonnt@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании.

Ключевые слова: бегущие волны, электрическое поле, поверхностный заряд, пористая среда, стоячие волны.

1. Волны на плоской свободной поверхности жидкости

Предполагается, что электропроводная жидкость с поверхностным зарядом находится на слое пористой среды конечной толщины. Внутри проводящей жидкости напряженность электрического поля **E** равна нулю, а на поверхности направлена по нормали вовне. Величины, относящиеся к пористой среде, жидкости и атмосфере, обозначаются индексами 1, 2, 3 соответственно. Ось Oz декартовой системы координат направлена вертикально вверх против вектора **g** ускорения свободного падения, а оси Ox и Oy лежат на плоской поверхности раздела жидкости и пористой среды.

Уравнения движения жидкости в пористой среде при условии $\mathbf{E} = 0$ запишем в виде

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial t} = -\mathrm{grad}\, p_1 + \rho\mathbf{g} - \frac{\eta}{K}\mathbf{u}_1, \quad \mathrm{div}\mathbf{u}_1 = 0. \quad (1)$$

Здесь ρ – плотность жидкости, p_1 – давление, Γ – пористость, $\mathbf{u}_1$ – макроскопическая скорость фильтрации, η – вязкость, K – коэффициент проницаемости пористой среды.

Уравнения движения свободной жидкости при $\mathbf{E} = 0$ запишем в линейном приближении (предполагается, что амплитуда волны значительно меньше ее длины):

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial t} = -\mathrm{grad}\, p_2 + \rho\mathbf{g}, \quad \mathrm{div}\mathbf{u}_2 = 0. \quad (2)$$

Здесь $\mathbf{u}_2$ – скорость жидкости, p_2 – давление.

Уравнения для электрического поля в атмосфере $\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = 0$, $\mathrm{div}\,\mathbf{E} = 0$. Система граничных условий:

1) $u_{1z} = 0$ при $z = -h_1$ (на дне), где h_1 – толщина слоя пористой среды;

2) $u_{1z} = u_{2z}$ при $z = 0$ (на границе пористой среды);

3) $p_1 = p_2$ при $z = 0$ на свободной поверхности жидкости с уравнением $z = h_2 + \xi(x, y, t)$, где h_2 – толщина слоя жидкости;

4) $u_{2n} = V_n$;

5) $\mathbf{E}_\tau = \mathbf{E} - \mathbf{n}E_n = 0$;

6) $p_{ij}n_i n_j + p_2 = -\alpha(1/R_1 + 1/R_2), p_{ij} = -p_{\text{атм}}\delta_{ij} + E_i E_j/(4\pi) - E^2\delta_{ij}/(8\pi)$.

Здесь $V_n = \partial x/\partial t$ – нормальная скорость поверхности жидкости; R_1, R_2 – радиусы кривизны поверхности; $p_{\text{атм}}$ – атмосферное давление; p_{ij} – максвелловский тензор механических напряжений в области 3; α – коэффициент поверхностного натяжения. Поверхностный заряд находится из условия $\sigma = E_n/(4\pi)$, где $E_n = \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}$, $\mathbf{n}$ – внешняя нормаль к поверхности жидкости.

Решение сформулированной краевой задачи ищется в виде затухающих бегущих волн $f(z)\exp[-\gamma t + i(k_1 x + k_2 y)]$, где $\gamma = \beta + i\omega$ – комплексный декремент, ω – частота, β – коэффициент затухания волны. Дисперсионное уравнение имеет третью степень относительно γ. Исследованы зависимости β и ω от волнового числа $k^2 = k_1^2 + k_2^2$ для различных частных случаев.

В отсутствие электрического поля данная задача решена в [1]. Рассмотрены следующие частные случаи:

1) $h_1/\lambda \ll 1$, $h_2/\lambda \ll 1$, где λ – длина волны;

2) $h_1/\lambda \gg 1$, $h_2/\lambda \ll 1$;

3) h_1 – произвольное, $h_2/\lambda \ll 1$.

Конкретные числовые расчеты велись для жидкого натрия при температуре 100 °С и следующих значениях параметров: $\rho = 0.93$ г/см^3, $\alpha = 206.4$ дин/см, $\eta = 0.69$ г/см·с, $\Gamma = 0.26$, $K = 2.14\cdot10^{-4}$.

Невозмущенные значения E_0 брались в промежутке от 0 до 50 ед. СГС (1 ед. СГС =

= 300 В/см). Остановимся подробнее на первом случае. Здесь частота $\omega > 0$ уменьшается с увеличением длины волны λ и слабо зависит от толщины h_1, но с ростом h_2 значения ω увеличиваются (при $\lambda = \mathrm{const}$); декремент $\beta > 0$ также уменьшается с ростом λ, при этом с ростом h_1 величина β увеличивается (при $\lambda = \mathrm{const}$), а с ростом h_2 – уменьшается (при $\lambda = \mathrm{const}$).

С ростом E_0 значения ω уменьшаются при заданных λ, h_1, h_2. При этом изменение h_1 практически не влияет на ω, при увеличении h_2 значения ω увеличиваются (при заданных λ, h_1).

С увеличением E_0 значения β уменьшаются при заданных λ, h_1, h_2. При увеличении h_1 значения β увеличиваются. При увеличении h_2 значения β уменьшаются.

2. Волны на поверхности цилиндрического столба электропроводной жидкости с поверхностным зарядом, окружающей пористое цилиндрическое ядро

Система уравнений имеет вид (1), (2). Задача решается в цилиндрической системе координат. Граничные условия записываются для цилиндрической поверхности раздела пористой среды и жидкости, а также на возмущенной свободной поверхности жидкого столба. Вместо условия 1 в берется условие конечности скорости $\mathbf{u}_1$ на оси цилиндра.

Решение сформулированной краевой задачи с заранее неизвестной свободной поверхностью жидкости ищется в виде бегущих затухающих волн $f(r)\exp(-\gamma t + ikz + im\theta)$, где r, z, θ – цилиндрические координаты; k и m – продольное и поперечное волновые числа, $\gamma = \beta + i\omega$ – декремент. Решение выражается через модифицированные функции Бесселя $I_m(kr)$ и $K_m(kr)$.

Рассмотрены различные частные случаи. Найдены условия, при выполнении которых существуют бегущие затухающие волны. Показано, что при определенных условиях волны не могут существовать и жидкий цилиндр распадается на капли.

Данная задача является обобщением известной классической задачи Рэлея о распаде струи обычной жидкости. Распад струи невязкой электропроводной жидкости при отсутствии пористого ядра рассмотрен в [2].

3. Стоячие волны

Рассматривается задача о затухании стоячих волн (при отсутствии электрического поля) в слое жидкости на пористом основании в двух случаях: 1) в полости, имеющей форму прямоугольного параллелепипеда; 2) в полости цилиндрической формы. Математическая модель представляет собой совокупность уравнений (1), (2) движения жидкости в пористой среде и свободном слое и соответствующих граничных условий (3) на поверхности раздела жидкости и пористой среды, свободной поверхности жидкости, а также на поверхности полости, содержащей жидкость. Рассмотрены различные частные случаи.

Работа поддержана Федеральной целевой программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 годы (государственный контракт №П695 от 20 мая 2010 года).

Список литературы

1. Столяров И.В., Тактаров Н.Г. Распространение поверхностных волн в слое жидкости на пористом основании // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1987. №5. С. 183–186.

2. Huebner A.L., Chu N.R. Instability and breakup of charged liquid jets // J. Fluid Mech. 1971. Vol. 49, No 2. P. 361–372.

MODELING SURFACE WAVES IN A LAYER OF FLUID ON A POROUS BED

N.G. Taktarov, S.M. Mironova

The propagation of surface waves in a liquid layer on a porous bed is investigated.

Keywords: progressive waves, electric field, surface charge, porous bed, standing waves.