УДК 533.6.011.8

ПРИМЕНЕНИЕ СИСТЕМЫ МОМЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ R13 ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

М.Ю. Тимохин

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

timokhin@physics.msu.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается численное решение регуляризованной моментной системы Грэда R13 в двухмерном случае. Предложенный численный метод представляет собой вариант явного метода Годунова повышенного порядка точности с использованием линейного восстановления параметров течения на расчетном слое. Потоки консервативных переменных через грани контрольного объема рассчитываются с помощью метода HLL для задачи Римана. При аппроксимации уравнений по времени используется модифицированный метод Рунге–Кутты 2-го порядка.

Ключевые слова: моментная система уравнений, переходный режим, метод Годунова.

Введение

Газодинамические течения в соответствии с используемой физической моделью среды можно разделить на три класса: течение сплошной среды, течение разреженного газа и переходный режим течения. Это условное разделение можно провести с помощью числа Кнудсена $\mathrm{Kn} = \lambda/L$, где λ – средняя длина свободного пробега, а L – характерный размер системы. Соответственно при $\mathrm{Kn} < 0.001$ среда сплошная (континуальный режим течения), а при $\mathrm{Kn} > 10$ – разреженная (свободно молекулярный режим течения), $0.001 < \mathrm{Kn} < 0.1$ – режим течения со скольжением, $0.1 < \mathrm{Kn} < 10$ – переходный режим.

Следует отметить, что переходный режим реализуется в некоторых практических задачах. Так, например, он встречается при входе летательного аппарата в верхние слои атмосферы, где достаточно велика средняя длина свободного пробега. С другой стороны, прикладное значение этот режим имеет и при уменьшении характерного размера среды. Это актуально для течений в микроканалах и микросоплах, где мала средняя длина свободного пробега, но при этом характерный размер вполне сравним с ней.

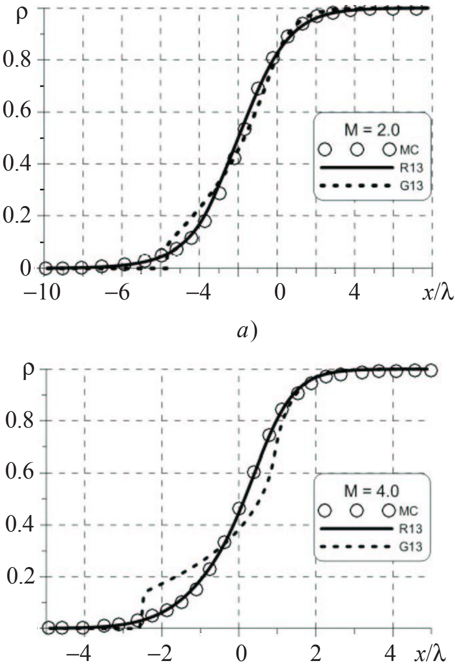
Численное моделирование переходных процессов вызывает определенные трудности. С одной стороны, их моделирование с помощью уравнений Навье–Стокса (континуальный подход) не всегда приводят к физическим результатам. С другой стороны, можно было бы использовать метод Монте-Карло или уравнение Больцмана с учетом интеграла столкновений (корпускулярный подход). Но в этом случае необходимы вычислительные возможности куда большие, нежели при использовании континуального подхода.

Математическая и численная модели

В качестве математической модели выбрана, так называемая, регуляризированная тринадцатимоментная система Грэда [1, 2], а точнее, ее двумерный вариант [6]. Для решения этой системы использован численный метод, который представляет собой вариант метода Годунова повышенного порядка точности [3] с использованием линейного восстановления параметров течения на расчетном слое. Потоки консервативных переменных через грани контрольного объема рассчитываются с помощью приближенного по методу HLL [4] решения задачи Римана. Для аппроксимации системы уравнений по времени используется модифицированный явно-неявный метод Рунге–Кутты 2-го порядка [5]. Достаточно подробно численный алгоритм описан в работах [7, 8].

Результаты

В качестве первой задачи было выбрано моделирование структуры ударной волны. Были рассчитаны профили для чисел Маха от $M = 1.5$ до $M = 4.0$, проведено сравнение профилей с результатами метода Монте-Карло [9] и результатами оригинальной системы Грэда [1]. Сравнение показало, возможность применения системы R13 для высокоскоростных течений газа. Результаты сравнения для двух чисел Маха представлены на рис. 1 (зависимость безразмерной плотности (ρ) от пространственной координаты, отнесенной к средней длине свободного пробега (x/λ)). Также были сопоставлены результаты R13 для числа Маха M = 8.0 и экспериментальные данные [10]. Результаты также оказались довольно близки друг к другу.



б)

Рис. 1

Еще одно преимущество выбранной системы уравнений заключается в наличии заброса в профиле температуры при достаточно больших числах Маха (M > 3.0), который присутствует как в экспериментальных данных [10], так и в результатах метода Монте-Карло [9]. Результаты системы R13 приведены на рис. 2. По оси ординат отложена температура (T), нормированная на значение за фронтом ударной волны, а по оси абсцисс – координата, отнесенная к значению средней длины свободного пробега (x/λ).

Далее была рассмотрена задача о дифракции ударной волны на зоне температурной неоднородности взаимодействия ударной волны с пузырем более плотного газа. Расчетная область имеет размеры 5×2. В начальный момент времени в $x = 1.0$ задается ударная волна с числом Маха M = 2.0. Профиль ее определяется из решения соответствующей одномерной задачи. В точке с координатами (2.5, 1.0) находится центр термической неоднородности. Расчет производился для чисел Кнудсена Kn = 0.01, Kn = 0.05 и Kn = 0.10.

На рис. 3 изображено распределение плотности в области в момент времени $t = 1.0$ (то есть сразу после прохождения ударной волны по области неоднородности) для Kn = 0.10.

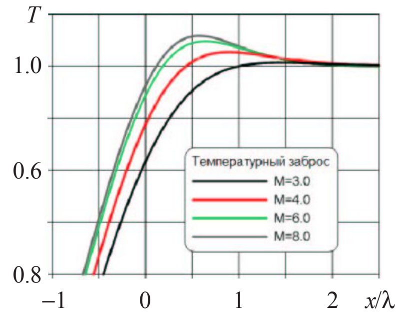


Рис. 2

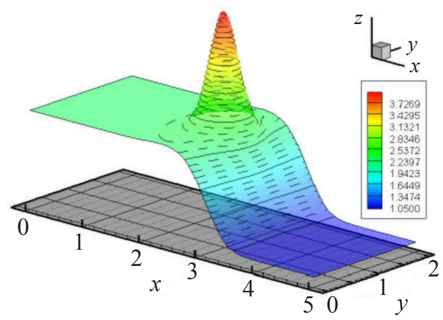
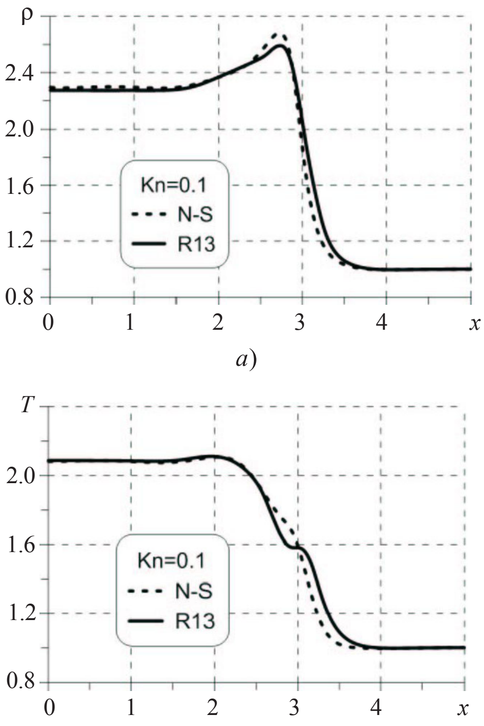


Рис. 3

При числе Кнудсена Kn = 0.01 результаты системы R13 и системы уравнений Навье–Стокса дают практически идентичные результаты. С ростом числа Кнудсена, то есть по мере продвижения в сторону режима разреженного газа, начинают расти различия. На рис. 4 изображены сравнения профилей температуры и плотности, полученных с помощью R13 и с помощью Навье – Стокса при Kn = 0.10 и $y = 1.0$.

Следующим этапом работы с данной системой уравнений стала разработка численного алгоритма для реализации граничных условий [6, 7] при взаимодействии газа с твердой непроницаемой изотермической стенкой. Такой алгоритм был реализован и протестирован.

На основе численного решения рассмотренных задач показана возможность применения системы моментных уравнений R13 как для сплошной, так и для переходной среды. То есть можно говорить о применимости этого подхода для задач, где присутствуют оба этих режима. В ходе исследования также удалось показать преимущество системы R13 над оригинальной системой Грэда и уравнениями Навье–Стокса.



а)

б)

Рис. 4

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-00711а).

Список литературы

1. Grad H. // Comm. Pure Appl. Math. 1949. V. 2. P. 331–407.
2. Struchtrup H., Torrilhon M. // Phys. Fluids. 2003. V. 15. P. 2668–2680.
3. Иванов И.Э., Крюков И.А. // Математическое моделирование. 1996. Т. 8, №6. С. 47–55.
4. Harten A., Lax P.D., van Leer B. // SIAM Rev. 1983. No 25. P. 35.
5. Глушко Г.С., Иванов И.Э., Крюков И.А. // Математическое моделирование. 2009. Т. 21, №12. С. 103–121.
6. Torrilhon M. // Multiscale Model. Simul. 2006. V. 5, No 3. P. 695–728.
7. Тимохин М.Ю., Иванов И.Э., Крюков И.А. // Вестник МАИ. 2010. Т. 17, №7. С. 80–87.
8. Иванов И.Э., Крюков И.А., Тимохин М.Ю. // Аэрофизика и физическая механика классических и квантовых систем (АФМ-2009): Труды 3 Всерос. школы-семинара. М.: ИПМех РАН. 2010.
9. Bird G. Molecular gas dynamics and the gas flows. Oxford: Clarendon Press, 1994.
10. Schmidt B. // Journal of fluid mechanics. 1969. V. 39, No 2. P. 361–373.
11. Gu X. J., Emerson D.R. // Journal of Computational Physics. 2007. P. 263–283.
12. Struchtrup H., Torrilhon M. // J. Comput. Phys. 2008. V. 227. P. 1982–2011.

APPLICATION OF R13 SET OF MOMENT EQUATIONS FOR NUMERICALLY MODELLING GAS-DYNAMIC FLOWS

M.Yu. Timokhin

The article is devoted to numerical solution of regularized Grad's moment equations for two-dimensional case. The numerical method is a variant of the explicit high-order Godunov method with linear flow parameter reconstruction. Fluxes of conservative variables on computational cell edges are evaluated with approximate HLL Riemann solver. Modified Runge–Kutta method of the second order of accuracy is used for time approximation.

Keywords: moment set of equations, transition regime, Godunov method.