УДК 519.633, 532.529.6

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ФУНКЦИИ УРОВНЯ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ ДВУХФАЗНЫХ СРЕД

© 2011 г.

Л.Е. Тонков

Институт прикладной механики УрО РАН, Ижевск

tnk@udman.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Показана возможность применения численного метода на основе функции уровня для решения задач гидродинамики двухфазных сред в трехмерной постановке. Рассмотрены процессы изменения поверхности раздела сред при дроблении и слиянии капель.

Ключевые слова: метод функции уровня, численное моделирование, свободная поверхность, уравнения Навье–Стокса.

Введение

Задачи, возникающие при описании гидродинамических процессов в многофазных средах, во многих практически важных случаях можно свести к рассмотрению двухфазной системы с несмешивающимися фазами. Моделирование такого рода течений приводит к необходимости решения системы уравнений Навье–Стокса для каждой фазы с учетом граничных условий на поверхности раздела и одновременным определением положения этой поверхности. Значительная часть разработанных численных алгоритмов основана на процедуре явного выделения межфазных границ, когда расчетная сетка в процессе решения задачи постоянно перестраивается в соответствии с изменениями положения и формы поверхности раздела. Значительно более удобным может оказаться применение численных методов, в которых отсутствует необходимость явного выделения границы раздела путем перестроения расчетной сетки, то есть методов сквозного счета.

Математическая модель

Пусть область $\Omega : \Omega \in R^3$ заполнена двухфазной средой и $\Omega = \Omega_1 \cup \Gamma \cup \Omega_2$. Пусть в подобласти Ω_1 находится более плотная среда (жидкость), а в Ω_2 – менее плотная (газ); Γ является границей раздела фаз. Для определения Γ вводится в рассмотрение скалярная функция уровня $\varphi(t, \mathbf{x})$, $|\varphi| \leq 1$, вид которой может быть в известном смысле произвольным, а сечение $\varphi(t, \mathbf{x}) = 0$ совпадает с границей раздела фаз [1]. Дополнительно к основной системе уравнений гидродинамики решается уравнение переноса для функции уровня φ. Таким образом, формально в любой момент времени мы можем точно определить положение поверхности раздела.

Рассмотрим систему из двух несмешивающихся несжимаемых вязких сред, движение каждой из которых описывается уравнениями Навье–Стокса и уравнением неразрывности [2]:

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{U})_i}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{U}\mathbf{U})_i = -\nabla p_i + \nabla \cdot \tau_i + \rho_i \mathbf{g},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U}_i = 0, \qquad (1)$$

где индекс i = 1, 2 – номер среды, $\tau_i = \mu_i(\nabla\mathbf{U} + \nabla\mathbf{U}^T)$ – тензор вязких напряжений, ρ – плотность, $\mathbf{U}$ – вектор скорости, p – давление, μ – динамическая вязкость, $\mathbf{g}$ – вектор ускорения свободного падения.

На границе раздела сред выполняются условия динамического равновесия

$$(\tau_1 - \tau_2)\mathbf{e} = (p_1 - p_2 + \sigma K)\mathbf{e}, \quad \mathbf{U}_1 = \mathbf{U}_2, \quad (2)$$

где $\mathbf{e}$ – единичный нормальный вектор, внешний по отношению к Ω_1; K – кривизна поверхности Γ; σ – коэффициент поверхностного натяжения. Геометрические характеристики поверхности раздела фаз однозначно определяются по функции уровня [1, с. 131]:

$$\mathbf{e} = \nabla\varphi / |\nabla\varphi|, \quad K = \nabla(\nabla\varphi / |\nabla\varphi|).$$

Силу поверхностного натяжения, действующую в узком переходном слое, который в пределе является бесконечно тонким и совпадает с Γ, можно свести к объемной силе [3]:

$$\mathbf{F} = -\sigma K \nabla\varphi \delta(\varphi). \qquad (3)$$

Обозначим через $H(\varphi)$ функцию Хевисайда, такую, что $H(\varphi) = 1$ для $\varphi \geq 0$. Вводя в рассмотрение функции плотности $\rho = \rho_2 + (\rho_1 - \rho_2)H(\varphi)$ аналогично введенным для давления и вязкости, перепишем систему (1) с учетом (2), (3) следующим образом:

$$\frac{\partial \rho \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{U}\mathbf{U}) = -\nabla p + \nabla \cdot \tau + \rho \mathbf{g} + \mathbf{F},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0. \qquad (4)$$

Система (4) дополняется уравнением переноса функции уровня

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \mathbf{U} \cdot \nabla \varphi. \qquad (5)$$

Для численного интегрирования системы (4), (5) будем применять метод конечных объемов, который, по определению, обладает свойством консервативности и, кроме того, позволяет использовать произвольные неструктурированные расчетные сетки, что делает его универсальным и удобным для расчета течений в областях со сложной геометрией.

В результате накопления в процессе решения вычислительных ошибок (численной диффузии) функция уровня изменяет свой вид, что неизбежно приводит к погрешностям в определении величины K, а значит, и к искажению геометрических характеристик поверхности раздела. Для управления влиянием численной диффузии возможно применение искусственного сглаживания разрывных функций на границе раздела фаз совместно с выполнением процедуры реинициализации [1, с. 64].

Численный эксперимент

Следуя [4], рассмотрим задачу о соударении пяти капель вязкой несжимаемой жидкости при отсутствии силы тяжести ($\mathbf{g} = 0$). Исходная область представляет собой прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием со стороной $10R$ и высотой $20R$, R – радиус капли. В начальный момент времени капли уравновешены внутренним давлением. Центры капель имеют следующие координаты: ($5R$, $5R$, $5R$), ($2.5R$, $5R$, $5R$), ($7.5R$, $5R$, $5R$), ($5R$, $2.5R$, $5R$), ($5R$, $7.5R$, $5R$). Центральная капля покоится, а окружающие движутся по направлению к ее центру с равными по модулю скоростями. Отношение плотностей сред равно 1000, отношение вязкостей 100. Число Рейнольдса Re = 100, число Вебера We = 100.

На рис. 1 показаны сечения функции уровня, то есть конфигурация границы раздела жидкость–газ в различные моменты времени.

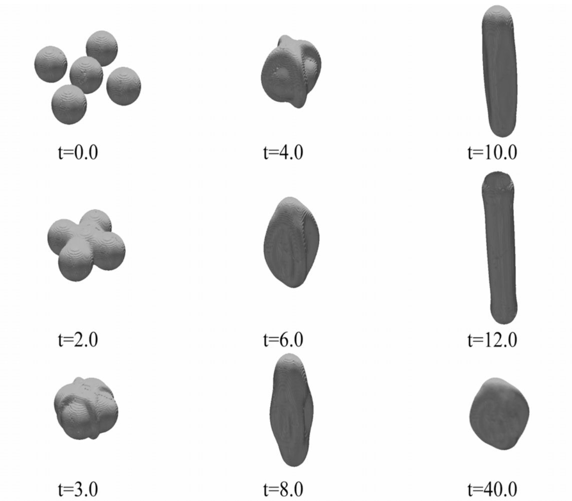

Рис. 1

Представленный метод позволяет моделировать процессы слияния, дробления капель и может быть успешно применен для решения задач динамики двухфазных сред со сложной топологией границы раздела [5].

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №10-01-96039-Урал.

Список литературы

1. Osher S.J., Fedkiw R.P. Level Set methods and dynamic implicit surfaces. N-Y: Springer, 2003. 273 p.
2. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987. 840 с.
3. Brackbill J.U., Kothe D.B., Zemach C.A. A continuum method for modeling surface tension // J. Comp. Physics. 1992. Vol. 100, No 2. P. 335–354.
4. Liang R., Satofuka N. Numerical study on three-dimensional unsteady motion of droplets using level set method // Computational Fluid Dynamics 98: Proc. 4th EC-COMAS conference: John Wiley & Sons, 1998. Vol. 2. P. 421–425.
5. Тонков Л.Е. Численное моделирование динамики капли вязкой жидкости методом функции уровня // Вестник Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Т. 3. С. 134–140.

APPLICATON OF THE LEVEL SET METHOD TO TWO-PHASE HYDRODYNAMIC PROBLEMS

L.E. Tonkov

The numerical simulation of viscous drop dynamics was studied by the level set method for incompressible Navie–Stokes equations. Some numerical results are presented and compared with other simulations.

Keywords: numerical simulations, level set method, free surface tension, Navier–Stokes equations.