УДК 544.7+541.18

ПОРИСТАЯ СФЕРИЧЕСКАЯ КАПСУЛА В ОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ЖИДКОСТИ

С.И. Васин

Российский госуниверситет нефти и газа им. И.М. Губкина, Москва

s.vasin@rambler.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Решена задача обтекания сферической пористой капсулы однородным на бесконечности потоком жидкости. Течение в пористом слое описано уравнением Бринкмана, причем вязкость среды Бринкмана считалась отличной от вязкости чистой жидкости. На границе жидкость–пористая среда использовалось условие скачка касательных напряжений. Найдены распределения скорости и давления, вычислена сила гидродинамического воздействия на капсулу.

Ключевые слова: коллоидная система, пористая капсула, уравнение Бринкмана.

Рассмотрим процесс обтекания сферической капсулы радиуса $\tilde{a}$, представляющей собою каплю радиуса $\tilde{R}$, покрытую пористым слоем толщины $\tilde{\delta}$, потоком жидкости, имеющим на бесконечности заданную скорость $\tilde{\mathbf{U}}$. Эта задача эквивалентна задаче о движении капсулы в неограниченном объеме вязкой жидкости с постоянной скоростью $\tilde{\mathbf{U}}$. Распределение скоростей второй задачи получается простым вычитанием скорости $\tilde{\mathbf{U}}$, при этом частица оказывается движущейся со скоростью $-\tilde{\mathbf{U}}$, а жидкость на бесконечности – неподвижной.

Направляя ось $\tilde{z}$ вдоль вектора скорости $\tilde{\mathbf{U}}$, выберем сферическую систему координат ($\tilde{r}$, θ, φ) с началом в центре частицы.

Движение жидкости при малых числах Рейнольдса внутри капли $(0<\tilde{r}<\tilde{R})$ и вне капсулы $(\tilde{a}<\tilde{r}<\infty)$ будем описывать уравнениями Стокса и неразрывности:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\nabla}\tilde{p}^{(i)}&=\tilde{\mu}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}^{(i)},\\ \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{v}}^{(i)}&=0,\end{aligned}\right\}\quad (i=1,3),\tag{1}$$

а в пористом слое $(\tilde{R}<\tilde{r}<\tilde{a})$ – уравнениями Бринкмана и неразрывности [1]:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\nabla}\tilde{p}^{(2)}&=\tilde{\mu}^{(2)}\tilde{\Delta}\tilde{\mathbf{v}}^{(2)}-\tilde{k}\tilde{\mathbf{v}}^{(2)},\\ \tilde{\nabla}\cdot\tilde{\mathbf{v}}^{(2)}&=0,\end{aligned}\right\}\tag{2}$$

где знак тильда обозначает размерные величины, верхний индекс (i) указывает номер области, к которой относится величина (1 – жидкость внутри капли, 2 – пористый слой, 3 – жидкость вне капсулы), $\tilde{\mu},\tilde{\mu}^{(2)}$ – коэффициенты вязкости чистой жидкости и среды Бринкмана соответственно, $\tilde{p}^{(i)}$ – давления, $\tilde{\mathbf{v}}^{(i)}$ – векторы скорости, $\tilde{k}$ – константа Бринкмана, обратно пропорциональная удельной проницаемости пористого слоя.

Отметим, что использование уравнений Бринкмана вместо уравнений Дарси позволяет точно записать граничные условия на межфазной поверхности пористый слой – объемная жидкость.

Первоначально предполагалось, что уравнения Бринкмана применимы только в случае малой доли твердой фазы [1], однако в [2] показано, что уравнения Бринкмана удовлетворительно описывают течение вязкой жидкости в пористом слое для достаточно широкого диапазона изменений пористости.

В общем случае эффективная вязкость среды Бринкмана $\tilde{\mu}^{(2)}$ считается отличной от вязкости чистой жидкости $\tilde{\mu}$. В [3] показано, что для сред, состоящих из неподвижных дисперсных частиц, эффективная вязкость уменьшается с ростом объемной концентрации твердой фазы, в то время как для дисперсий с подвижными частицами авторы работы [4] получили возрастание эффективной вязкости. Лундгрен [5] показал, что при разбавлении суспензии вязкости среды Бринкмана и чистой жидкости выравниваются $(\tilde{\mu}^{(2)}\to\tilde{\mu})$.

Исходя из сказанного, будем исследовать общий случай различных вязкостей в пористом слое и окружающей жидкости.

Чтобы сформулировать краевую задачу для уравнений (1), (2) необходимо задать граничные условия.

На межфазных границах жидкость–пористый слой ($\tilde{r}=\tilde{R}$ и $\tilde{r}=\tilde{a}$) задаем условия непрерывности скорости и нормальных напряжений $\tilde{\sigma}_{rr}$, а также скачка касательных напряжений $\tilde{\sigma}_{r\theta}$ [6, 7]:

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(i)} = \tilde{\mathbf{v}}^{(2)},$$

$$\tilde{\sigma}^{(i)}_{rr} = \tilde{\sigma}^{(2)}_{rr}, \qquad (3)$$

$$\tilde{\sigma}^{(i)}_{r\theta} - \tilde{\sigma}^{(2)}_{r\theta} = \mp\beta\tilde{v}^{(i)}_{\theta}\sqrt{\tilde{k}_0\tilde{\mu}} \quad (i = 1, 3),$$

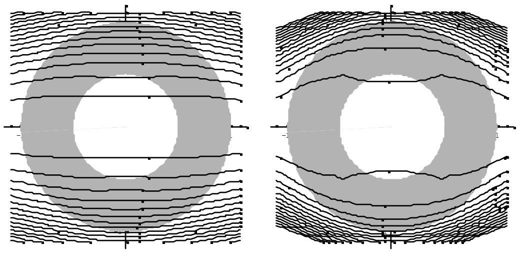
где β – параметр, характеризующий скачок касательных напряжений и изменяющийся в пределах от 0 до 1 [7]. Скачок напряжений обусловлен диссипацией потока импульса на межфазной границе жидкость – пористая среда, поэтому величина параметра β в условии (3) при $i = 1$ берется со знаком минус, а при $i = 3$ – со знаком плюс.

Вдали от капсулы задаем однородный поток

$$\tilde{\mathbf{v}}^{(3)} \to \tilde{\mathbf{U}}, \quad \tilde{r} \to \infty. \qquad (4)$$

Краевая задача (1)–(4) решена аналитически. Найдены распределения скорости и давления, вычислена сила гидродинамического воздействия на капсулу и проанализировано влияние физико-химических параметров на гидродинамический процесс.

На рис. 1 изображены линии тока при следующих значениях безразмерных параметров течения: $\delta = 0.5$, $m = 1$, $\beta = 0$, $s_0 = 4$ (*а*), $s_0 = 8$ (*б*) ($\delta = \tilde{\delta}/\tilde{a}$, $m = \tilde{\mu}^{(2)}/\tilde{\mu}$, $s_0 = \tilde{a}/\tilde{R}_b$, $\tilde{R}_b = \sqrt{\tilde{\mu}/\tilde{k}}$). При значении безразмерного параметра Бринкмана $s_0 = 4$ (рис. 1а) пористая среда оказывает слабое сопротивление течению и линии тока имеют малое искривление. С ростом параметра s_0 (рис. 1*б*, $s_0 = 8$) сопротивление среды возрастает, и кривизна линий тока увеличивается. При этом вдали от оси симметрии жидкости энергетически выгоднее течь через пористый слой, обтекая жидкую каплю. Вблизи оси симметрии жидкость сначала начинает обтекать каплю, а затем резко меняет направление движения и протекает через жидкую сферу (рис. 1*б*).



а) *б*)

Рис. 1

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты 10-08-92652-ИНД_а, 11-08-00807-а).

Список литературы

1. Brinkman H. // Appl. Sci. Res. 1947. A1. P. 27.
2. Pefferkorn E., Dejardin P., Varoqui R. // J. Colloid Interface Sci. 1975. V. 63. P. 353.
3. Koplic J., Levine H., Zee A. // Phys. Fluids. 1983. V. 26. P. 2864.
4. Starov V., Zhdanov V., Meireles M., Molle C. // Adv. Colloid Interface Sci. 2002. V. 96. P. 279.
5. Lundgren T. // J. Fluid Mech. 1972. V. 51. P. 273.
6. Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S. // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2635.
7. Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S. // Int. J. Heat Mass Transfer. 1995. V. 38. P. 2647.

POROUS SPHERICAL CAPSULE IN THE UNIFORM STREAM OF A LIQUID

S.I. Vasin

The problem of a liquid flow that is uniform at infinity around a spherical porous capsule is solved. The flow in a porous layer is described by the Brinkman equation assuming that the viscosity of the Brinkman medium differs from the viscosity of the liquid flowing around. The tangential stress jump condition is imposed on the porous medium-liquid interface. Velocity and pressure distributions are determined and the hydrodynamic force applied to the capsule is calculated.

Keywords: colloidal system, porous capsule, Brinkman equation.