УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ОДНОРОДНОМ АНИЗОТРОПНОМ СЛОЕ ПОРИСТОЙ СРЕДЫ

Ю.С. Федяев

Орловский госуниверситет

fedyaevys@gmail.com

Поступила в редакцию 16.06.2011

Ставится плоскопараллельная задача эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей и плотностей в однородном анизотропном слое пористой среды. Исследование задачи сведено к решению системы интегрального и дифференциального уравнений при заданном начальном условии. Предложен численный алгоритм решения этих уравнений на основе метода дискретных особенностей. Исследованы конкретные задачи эволюции границы раздела жидкостей.

Ключевые слова: плоскопараллельная фильтрация, анизотропная пористая среда, эволюция границы раздела жидкостей.

1. Плоскопараллельная стационарная фильтрация несжимаемой жидкости в недеформируемом однородном анизотропном слое пористой среды (грунте) постоянной толщиной $H = 1$ с тензором проницаемости $K = (K_{ij})$, $i, j = 1, 2$ может быть описана обобщенным потенциалом φ и функцией тока ψ. Эти функции зависят от декартовых координат x, y, времени t (t – параметр) и удовлетворяют всюду в области фильтрации D (за исключением особых точек течения) системе уравнений

$$K_{11}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{12}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad (1.1)$$

$$K_{21}\frac{\partial\varphi}{\partial x}+K_{22}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Здесь $\varphi = -(p + \rho\Pi)/\mu$, p – давление, μ – динамическая вязкость жидкости, ρ – плотность жидкости, Π – потенциал массовой силы. Компоненты тензора проницаемости K – постоянные величины.

Уравнения (1.1) записаны в безразмерных величинах. Система уравнений (1.1) относится к эллиптическому типу, если компоненты тензора проницаемости удовлетворяют условиям

$$K_{11} > 0,$$

$$\left|K_s\right| = K_{11}K_{22} - (K_{12}+K_{21})^2/4 > 0, \qquad (1.2)$$

где $|K_s|$ – определитель симметричной части тензора проницаемости.

Поставим задачу эволюции границы раздела жидкостей Γ_t на комплексной плоскости $z = x + iy$ (физической плоскости). Граница Γ_t делит область фильтрации D на части D_1 и D_2 ($D = D_1 \cup D_2$). В области D_1 движется жидкость постоянной вязкости μ_1 и плотности ρ_1, а в области D_2 – жидкость постоянной вязкости μ_2 и плотности ρ_2. Считаем, что при движении одна жидкость полностью замещает другую (модель «поршневого» вытеснения). Течение жидкости в области D описывает обобщенный потенциал $\varphi(z, t)$ и функция тока $\psi(z, t)$, которые удовлетворяют системе уравнений (1.1). Считаем, что на границе раздела жидкостей Γ_t капиллярные силы пренебрежимо малы. Тогда условия непрерывности давления и расхода жидкости на этой границе примут вид:

$$\mu_1\varphi^+(z,t)-\mu_2\varphi^-(z,t)=(\rho_2-\rho_1)\Pi(z,t),$$
$$\psi^+(z,t)=\psi^-(z,t), \quad z\in\Gamma_t. \qquad (1.3)$$

Здесь и далее «+» («–») обозначают предельные значения функций при подходе к границе Γ_t со стороны (противоположной стороны) орта нормали $\mathbf{n}$ (орт $\mathbf{n}$ направлен внутрь области D_1).

Положение границы Γ_t в плоскости z в любой момент времени $t > 0$ задаем параметрическим уравнением (s – параметр)

$$z = z(t, s), \quad z \in \Gamma_t. \qquad (1.4)$$

В начальный момент времени $t = 0$ положение границы Γ_t известно

$$z_0 = z(0, s), \quad z_0 \in \Gamma_0. \qquad (1.5)$$

Дифференциальное уравнение движения границы Γ_t имеет вид

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\upsilon^+(z,t)+\upsilon^-(z,t)}{2}, \quad z\in\Gamma_t. \qquad (1.6)$$

Здесь $\upsilon(z,t)=\upsilon_x(x,y,t)+i\upsilon_y(x,y,t)$ – комплексная скорость фильтрации. Компоненты скорости фильтрации υ_x и υ_y определяют первое и второе уравнения (1.1) соответственно.

Задача эволюции границы Γ_t ставится в плоскости z следующим образом. Задано положение границы Γ_0, потенциал массовой силы $\Pi(z, t)$, вязкости μ_1, μ_2 и плотности ρ_1, ρ_2 жидкостей, тензор проницаемости K. Необходимо найти положение границы Γ_t (1.4) при $t > 0$. Решение задачи состоит в интегрировании дифференциального уравнение (1.6) при начальном условии (1.5). При этом для нахождения скорости фильтрации $\upsilon(z, t)$ необходимо отыскать обобщенный потенциал $\varphi(z, t)$ и функцию тока $\psi(z, t)$, которые удовлетворяют системе уравнений (1.1) и граничным условиям (1.3).

2. Поставленная задача эволюции границы раздела жидкостей формулируется на вспомогательной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$. Это позволяет значительно упростить систему уравнений (1.1). На плоскости ζ течение происходит в области D' и характеризуется обобщенным потенциалом $\varphi(\zeta,t)$ и функцией тока $\psi(\zeta, t)$. Область D' связана с областью D гомеоморфным преобразованием

$$\zeta = z+\kappa\bar{z} \quad \left(z=\frac{\zeta-\kappa\bar{\zeta}}{1-|\kappa|^2}\right). \qquad (2.1)$$

Здесь

$\kappa=[K_{22}-K_{11}-i(K_{12}+K_{21})]/(K_{22}+K_{11}+2\sqrt{|K_s|})$ – комплексная константа, $|\kappa| < 1$.

Используя интеграл типа Коши, исследование задачи эволюции границы раздела жидкостей сведем к решению системы интегрального и дифференциального уравнений вида:

$$f(\zeta,t)-\frac{\lambda}{\pi}\int_{\Gamma_t'} f(\tau,t)\Omega(\tau,\zeta)dl_\tau =$$

$$=2[\lambda\varphi_0(\zeta,t)+\alpha\Pi(\zeta,t)], \quad \zeta\in\Gamma_t', \qquad (2.2)$$

$$\frac{d\bar{\zeta}}{dt}=(1-|\kappa|^2)\times \qquad (2.3)$$

$$\times\left[\bar{\upsilon}_0(\zeta,t)+\frac{|K|}{2\pi\sqrt{|K_s|}i}\int_{\Gamma_t'}\frac{\partial f(\tau,t)}{\partial\tau}\frac{d\tau}{\tau-\zeta}\right], \quad \zeta\in\Gamma_t',$$

где

$$\Omega(\tau,\zeta)=\frac{\partial}{\partial l_\tau}\left[\arg(\tau-\zeta)-\sqrt{|K_a|/|K_s|}\ln|\tau-\zeta|\right],$$

$\alpha = (\rho_2 - \rho_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\lambda = (\mu_2 - \mu_1)/(\mu_2 + \mu_1)$, $\lambda \in (-1, 1)$, $|K|$ – определитель тензора K, $|K_a| = (K_{12} - K_{21})^2/4$, $f(\zeta, t)$ – вещественная непрерывная на Γ_t' функция, $\upsilon_0(\zeta, t)$ – заданное невозмущенное поле скоростей жидкостей вязкости $\mu_1 = \mu_2 = 1$ и плотности $\rho_1 = \rho_2 = 1$. Для интегрирования дифференциального уравнения движения границы (2.3) необходимо добавить начальное условие, которое следует из (1.5) с учетом (2.1). По найденному положению границы Γ_t' в плоскости ζ определяем ее положение при $t > 0$ в физической плоскости z, используя преобразование (2.1).

3. Система уравнений (2.2), (2.3) решается численно на основе метода дискретных особенностей. Полагаем, что положение границы Γ_t' в момент времени t_p, $p = 0, 1, \ldots$, задается множеством точек ζ_i^p, $i = 0, 1, \ldots, m$. В начальный момент времени точки ζ_i^0, $i = 0, 1, \ldots, m$, разбивают границу Γ_0' равномерно по длине на m частей. Интегральное уравнение (2.2) сводится в каждый момент времени t_p к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно функции $f(\zeta,t)$. Совместно с интегральным уравнением численно решаются дифференциальные уравнения движения границы (2.3) для всех точек ζ_i^0, $i = 0, 1, \ldots, m$. Это позволяет найти положение границы в последующие моменты времени t_p.

Построенный численный алгоритм позволяет исследовать широкий класс задач эволюции границы раздела жидкостей в однородном анизотропном слое пористой среды. При этом задачи решаются на вспомогательной плоскости ζ, а затем с помощью преобразования (2.1) получаем решение на физической плоскости z. Конкретные задачи эволюции границы раздела жидкостей исследованы в [1, 2].

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 09-01-97509).

Список литературы

1. Пивень В.Ф., Федяев Ю.С. Математическое моделирование эволюции границы раздела «разноцветных» жидкостей в анизотропном однородном слое пористой среды // Ученые записки Орловского гос. ун-та. 2010. №2 (36). Серия: Естественные, технические и медицинские науки. С. 49–55.

2. Федяев Ю.С. Исследование плоскопараллельной эволюции границы раздела жидкостей различных вязкостей в анизотропной однородной пористой среде // Ученые записки Орловского гос. ун-та. 2010. №4(38). Серия: Естественные, технические и медицинские науки. С. 33–41.

MATHEMATICALLY MODELING THE EVOLUTION OF A FLUID-FLUID INTERFACE IN AN HOMOGENEOUS LAYER OF AN ANISOTROPIC POROUS MEDIUM

Yu.S. Fedyaev

The problem of plane-parallel evolution of the interface between fluids with different viscosities and densities in homogeneous layer of anisotropic porous medium is formulated. Investigation of the problem is reduced to solving a system of integral and differential equations with given initial condition. A numerical algorithm for solving these equations using the method of discrete singularities is presented. Specific problems of evolution of a fluid-fluid interface are investigated.

Keywords: plane-parallel filtering, anisotropic porous medium, evolution of a fluid-fluid interface.