

УДК 532.546

ЯЧЕЕЧНЫЕ МОДЕЛИ СЛОЖНОПРИСТЫХ СРЕД

© 2011 г.

А.Н. Филиппов

Российский госуниверситет нефти и газа им. И.М. Губкина, Москва

filippov.a@gubkin.ru

Поступила в редакцию 16.06.2011

Исследована гидродинамическая проницаемость мембран, моделируемых как агрегаты пористых цилиндрических или сферических частиц с непроницаемым ядром с использованием различных версий ячеечного метода Хаппеля и Бреннера. Для теоретического анализа течения в пористой среде применялось уравнение Бринкмана. Рассмотрены четыре варианта граничных условий на внешней поверхности ячейки: Хаппеля, Кувабары, Квашнина и Каннингэма – Мехты-Морзе. Соответствующие краевые задачи решены аналитически в квадратурах. Детально исследован возможный скачок напряжения сдвига на межфазной поверхности жидкость – пористое тело, а также его влияние на гидродинамическую проницаемость и картину течения в ячейке.

Ключевые слова: ячеечная модель, пористая среда Бринкмана, проницаемость, скачок касательных напряжений.

Постановка задачи и обсуждение

В соответствии с ячеечным методом [1] будем моделировать дисперсную систему (или мембрану) периодической решеткой одинаковых твердых и непроницаемых сферических или цилиндрических частиц радиуса \tilde{R} , покрытых пористым слоем толщины $\tilde{\delta}$ (рис. 1). Принимаем, что частицы заключены в жидкие сферические или цилиндрические оболочки радиуса \tilde{b} , значение которого выбирается таким образом, чтобы отношение объема частично пористой частицы к объему ячейки равнялось объемной доле с частиц в мембране, что в случае, например, сферических частиц дает $c = \gamma^3$:

$$1 - \varepsilon = \gamma^3 = \left(\frac{\tilde{a}}{\tilde{b}}\right)^3, \quad (1)$$

где γ – порозность среды, $\tilde{a} = \tilde{R} + \tilde{\delta}$ – общий радиус частицы с пористым слоем.

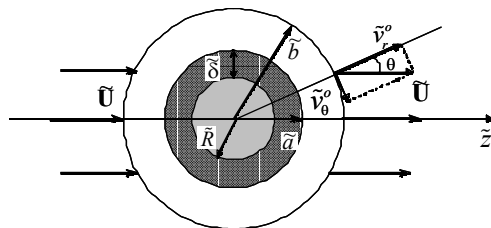


Рис. 1

Введем сферическую систему координат $\tilde{r}, \theta, \varphi$ с началом в центре частицы и осью \tilde{z} ,

направленной вдоль однородного потока $\tilde{\mathbf{U}}$, ($|\tilde{\mathbf{U}}| = \tilde{U}$) задаваемого на границе ячейки (см. рис. 1) в случае модели Каннингэма – Мехты-Морзе. Движение жидкости при малых числах Рейнольдса («ползущее течение») вне пористого слоя ($\tilde{a} \leq \tilde{r} \leq \tilde{b}$) будем описывать уравнениями Стокса и неразрывности:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \tilde{p}^o &= \tilde{\mu}^o \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}^o, \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^o &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

а в пористом слое ($\tilde{R} \leq \tilde{r} \leq \tilde{a}$) – уравнениями Бринкмана и неразрывности [2]:

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} \tilde{p}^i &= \tilde{\mu}^i \tilde{\Delta} \tilde{\mathbf{v}}^i - \tilde{k} \tilde{\mathbf{v}}^i, \\ \tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{v}}^i &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

где знак тильда обозначает размерные величины; o, i – индексы, соответствующие жидкой внешней и пористой внутренней зоне; $\tilde{\mu}^o, \tilde{\mu}^i$ – коэффициенты вязкости жидкости; \tilde{p}^o, \tilde{p}^i – давления; $\tilde{\mathbf{v}}^o, \tilde{\mathbf{v}}^i$ – векторы скорости; \tilde{k} – константа Бринкмана, обратно пропорциональная удельной проницаемости пористого слоя. На поверхности непроницаемого ядра частицы ставятся граничные условия прилипания, на межфазной границе пористый слой – жидкость ставятся условия непрерывности вектора скорости и тензора напряжений, либо условие непрерывности касательных напряжений заменяется на их скачок пропорциональный тангенциальной скорости на межфазной поверхности [3]. Использование граничного условия скачка напряжений сдвига дает возможность

учета влияния скольжения между пористой средой и чистой жидкостью на гидродинамическую проницаемость среды. Последнее обстоятельство важно в случае гидрофобных наночистотных мембран [4]. На границе жидкой ячейки выбирается одно из четырех известных условий: Хаппеля, Кувабары, Квашнина или Каннингэма. Получено точное аналитическое решение задачи и для сферической, и для цилиндрической частицы, вычислена гидродинамическая сила \tilde{F} , действующая на частицу в ячейке, а также гидродинамическая проницаемость мембраны.

В качестве иллюстрации полученных результатов на рис. 2 приведены графики зависимостей отношения сил $\Omega = \tilde{F} / \tilde{F}_{st}$ (где \tilde{F}_{st} – сила Стокса, действующая на частицу радиуса $\tilde{a} = \tilde{R} + \tilde{\delta}$) от параметра $s_0 = \tilde{a} / \tilde{R}_b$ при различных значениях параметра $\delta = \tilde{\delta} / \tilde{a}$.

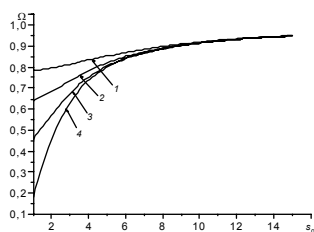


Рис. 2

На рисунке (при $m = \tilde{\mu}^i / \tilde{\mu}^o = 3$) обозначены кривые: 1 – для $\delta = 0.4$; 2 – для $\delta = 0.6$; 3 – для $\delta = 0.8$; 4 – для $\delta = 1$. Рост s_0 – это убывание так

называемого радиуса Бринкмана $\tilde{R}_b = \sqrt{\tilde{\mu}^o / \tilde{k}}$, т.е. утончение части пористого слоя (слоя Бринкмана), в котором фильтруется жидкость (при фиксированных $\tilde{\delta}$ и \tilde{R}). При этом в пористом слое вне слоя Бринкмана течения жидкости практически нет. Поэтому при $s_0 \rightarrow \infty$ сила \tilde{F} стремится к силе Стокса для жесткой непроницаемой частицы радиуса $\tilde{R} + \tilde{\delta}$ ($\Omega \rightarrow 1$). Следовательно, замена жесткого непроницаемого слоя на пористый слой снижает сопротивление движению частицы, причем тем сильнее, чем меньше коэффициент сопротивления \tilde{k} . Рост толщины пористого слоя $\tilde{\delta}$ при больших его проницаемостях ($s_0 \leq 1$) также снижает силу. В этом случае гидродинамическая проницаемость системы частично пористых частиц

$$\tilde{L}_{11} = \tilde{U} / (\tilde{F} / \tilde{V}),$$

где $\tilde{V} = (4/3)\pi\tilde{b}^3$ – объем ячейки, будет, напротив, расти.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 10-08-92652 Инд_а.

Список литературы

1. Хаппель Дж., Бренер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976.
2. Brinkman H. // Appl. Sci. Res. 1947. A1. P. 27.
3. Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S. // Int. J. Heat Mass transfer, 1995. V. 38. P. 2635–2646.
4. Deo S. et al. // Adv. Coll. Int. Sci. 2010. DOI10.1016/j.cis.2010.08.004.

PERMEABILITY OF COMPLEX POROUS MEDIA

A.N. Filippov

Hydrodynamic permeability of a membrane composed of a set of porous cylindrical or spherical particles with impenetrable core is investigated. The cell method proposed by Happel and Brenner is used in the calculations. The flow of liquid in the porous medium is described by the Brinkman equations. All the known boundary conditions on the cell surface, such as the Happel, Kuwabara, Kvashnin, and Cunningham–Mehta-Morse models, are considered. The related boundary value problems of flow are solved analytically. The probable jump of shear stresses at the interface between a liquid and a porous body and its impact on the hydrodynamic permeability and flow picture are analyzed in detail.

Keywords: cell model, porous Brinkman medium, permeability, jump of shear stresses.