УДК 532.3

ДВИЖЕНИЕ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ДВУМЯ ПАРАЛЛЕЛЬНЫМИ СТЕНКАМИ

А.А. Харламов

Институт гидродинамики Академии наук Чешской Республики, Прага

kharlamov@ih.cas.cz

Поступила в редакцию 15.06.2011

Цилиндр движется между двумя стенками с произвольной скоростью и произвольно расположенным центром. Движение цилиндра эквивалентно движению двух решеток цилиндров с одной линией центров и с антипараллельными относительно нее скоростями. Для расчета потенциала течения используется обобщение метода изображений. Потенциал течения представляется как сумма потенциалов бесконечной последовательности диполей. Проверка на известных частных решениях показывает высокую точность полученного решения.

Ключевые слова: потенциальное течение, цилиндр между двумя стенками, метод изображений.

Метод изображений

Принципы метода изображений для плоских задач можно найти в [1]. Метод изображений основан на возможности построить изображение диполя мощности μ в цилиндре. Расстояние от диполя, лежащего в точке D, до центра цилиндра O равно f. Точка инверсии D' лежит на прямой, соединяющей диполь и центр цилиндра; расстояние от точки инверсии до центра цилиндра $f' = a^2/f$. Изображением является диполь мощности $\mu' = \mu a^2/f^{\,2}$ (a – радиус цилиндра) в точке инверсии, направленный антипараллельно диполю μ. В полученном течении от обоих диполей контур цилиндра является линией тока.

Последовательность диполей

Для решения задачи строится последовательность групп диполей. Пусть имеется N цилиндров радиусов a, двигающихся в идеальной жидкости со скоростями $\mathbf{v}_i$, $1 \le i \le N$, и расположенных в точках с радиус-векторами $\mathbf{r}_i$. Решение представляется в виде потенциала последовательности групп диполей. Первую группу составляют диполи, находящиеся в центрах цилиндров и имеющие потенциалы

$$\varphi(\mathbf{r}) = -\frac{a^2\mathbf{v}_i(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^2}, \quad 1 \le i \le N.$$

Для каждого цилиндра диполи первой группы, расположенные в других цилиндрах, нарушают граничные условия на этом цилиндре. Для устранения этого действия диполей первой группы вводится вторая группа, состоящая из изображений в каждом цилиндре диполей первой группы, расположенных в других цилиндрах. Можно ввести оператор изображения в i-м цилиндре A_i, действующий на потенциал диполя мощности μ_0, расположенного в точке $\mathbf{r}_0$ и направленного по единичному вектору $\mathbf{e}_0$:

$$A_i \frac{\mu_0\mathbf{e}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\mu_0 a^2}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|^2}\left[\mathbf{e}_0 - 2(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)\dfrac{\mathbf{e}_0(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|^2}\right]\times \\ \times\dfrac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i+(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)a^2/|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|^2}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i+(\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0)a^2/|\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|^2|^2}, \quad |\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|>a, \\ 0, \quad |\mathbf{r}_i-\mathbf{r}_0|<a. \end{cases}$$

Тогда потенциалы диполей второй группы запишутся

$$\varphi_{ij} = A_i\varphi_j, \quad 1 \le i \le N, \quad 1 \le j \le N.$$

Дальнейшие группы строятся аналогично. Заметим, что в случае двух цилиндров обобщенный метод изображений становится классическим.

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия жидкости определяется интегралом по контуру всех цилиндров:

$$T = \frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{N}\oint_i \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dl,$$

где φ – суммарный потенциал всех диполей решения, $\partial\varphi/\partial n$ – производная по внутренней нормали к поверхности цилиндра. Интеграл берется для каждого диполя в каждом цилиндре

$$\oint_i \varphi_0 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_i dl = \mu_0 v_i a \int_0^{2\pi} \frac{\mathbf{e}_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0|^2} \cos(\vartheta)\, d\vartheta =$$

$$= \mu_0 v_i a \begin{cases} \pi \cos(\alpha)/a, & |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i| < a, \\ \pi a_i \cos(\alpha + \pi - 2\beta)/|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_i| > a, \end{cases}$$

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор точки интегрирования, α – угол между направлением диполя и скоростью цилиндра, β – угол между скоростью цилиндра и вектором, проведенным из центра цилиндра к диполю.

Кинетическая энергия жидкости выражается

$$T = \rho\pi a^2/2(C_{m1} v_1^2 + C_{m2} v_2^2), \qquad (1)$$

где v_1, v_2 – компоненты скорости цилиндра, соответствующие перпендикулярному и параллельному стенкам направленям; C_{m1}, C_{m2} – коэффициенты соответствующих присоединенных масс. Потенциал течения и коэффициенты присоединенных масс были найдены численно для различных безразмерных расстояний между центром цилиндра и стенками $\bar{b} = b/a, \bar{c} = c/a$.

Сравнение

Движение цилиндра возле одной стенки исследовано в [2]. Коэффициенты присоединенных масс в этом случае равны $C_{m1} = C_{m2} = C_m$. На рис. 1*а* представлено сравнение с решением [2] (линия) коэффициентов присоединенных масс цилиндра, рассчитанных обобщенным методом изображений (точки).

Обтекание решетки цилиндров исследовано в [3]. На рис. 1*б* представлено сравнение с решением [3] (линия) соответствующего коэффициента присоединенных масс C_{m2} цилиндра, двигающегося параллельно двум стенкам на равном расстоянии между ними, $b = c$, рассчитанного методом изображений (точки).

Поперечное обтекание цилиндра в двойной решетке соответствует движению параллельно двум стенкам цилиндра, расположенного асимметрично между ними. Эта задача была решена методом граничных элементов по схеме [4]. Сравнение безразмерной скорости на поверхности цилиндра, рассчитанное по схеме [4] (линия) и методом изображений (точки), представлено на рис. 1*в*; расстояние до одной стенки $\bar{c} = 1.2$, до другой $\bar{b} = 1.5$.

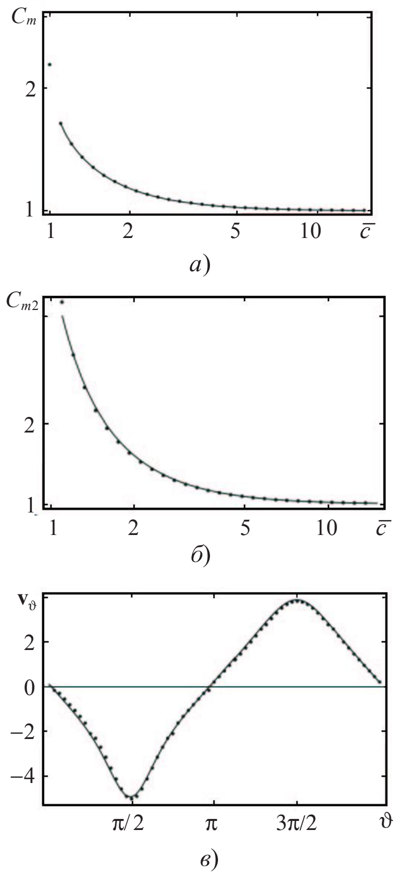

Рис. 1

Рассчитанные коэффициенты присоединенных масс C_{m1}, C_{m2} цилиндра между двумя стенками использовались для моделирования автоколебаний круговых цилиндров в потоке в канале [5].

Работа выполнена в рамках исследовательского плана института № AV0Z20600510.

Список литературы

1. Милн-Томсон Л.М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964.

2. Мазур В.Ю. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1966. Т. 3. С. 75–79.

3. Кочин Н.Е. // Прикладная математика и механика. 1941. Т. 5, №2. С. 165–192.

4. Петров А.Г. // ЖВМиМФ. 2008. Т. 48, №8. С. 1344–1361.

5. Карликов В.П., Хомяков А.Н., Шоломович Г.И. // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2005. №5. С. 133–138.

MOTION OF A CIRCULAR CYLINDER IN AN IDEAL FLUID BETWEEN TWO PARALLEL WALLS

A.A. Kharlamov

A cylinder moves between two walls with arbitrary velocity and arbitrarily located centre. The motion of the cylinder is equivalent to the motion of two lattices of cylinders with one line of centres and with velocities anti-parallel relative to the line. To calculate the flow potential, a generalisation of the image method is used. The flow potential is represented as a sum of potentials of an infinite sequence of dipoles. Comparison with known particular solutions proves high accuracy of the obtained solution.

Keywords: potential flow, cylinder between two walls, images method.