Механика жидкости и газа
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (3), с. 1230–1231

УДК 519.63+532.59

СБАЛАНСИРОВАННЫЕ СХЕМЫ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

А.К. Хе

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

alekhe@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследуется задача построения сбалансированной схемы для гиперболических систем с правой частью. Рассматривается метод, основанный на использовании двух наборов переменных – консервативных и равновесных. Предлагается метод восстановления равновесных переменных в случае, когда аналитическое отображение между равновесными и консервативными переменными неизвестно. Для модельного скалярного уравнения построены сбалансированные схемы вплоть до четвертого порядка аппроксимации. Приведенные численные расчеты показывают сбалансированность схемы и высокий порядок точности.

Ключевые слова: гиперболические системы с правой частью, конечно-объемные схемы, сбалансированные схемы.

Постановка задачи

Стандартные конечно-объемные схемы, захватывающие разрывы, для законов сохранения могут быть распространены на случай систем с правой частью (источником) путем добавления осреднения источника в правой части. Однако необходимо аккуратно следить за поведением источниковых членов, особенно в случае решений, мало отличающихся от стационарных. В подобных случаях правая часть близка к градиенту потока, и вычислительные ошибки могут приводить к появлению нефизических осцилляций, сравнимых по величине с моделируемыми возмущениями. Эта проблема может быть решена построением схем, сохраняющих стационарные решения на дискретном уровне.

Подобные схемы носят название *сбалансированных схем* [1]. Большое количество работ было посвящено их развитию и анализу в последние годы (A. Bermudez, M.E. Vazquez, 1994; R.J. LeVeque, 1998; S. Jin, 2001; A. Kurganov, D. Levy, 2002). Сбалансированные центральные схемы на смещенных сетках были предложены в работах G. Russo (2001, 2005). Сбалансированные схемы высокого порядка были предложены в недавних статьях (M. Castro et al., 2006, 2008; S. Noelle et al., 2006, 2007; Y. Xing, C.-W. Shu, 2006).

В статье [2] был предложен новый подход к построению сбалансированных схем, основанный на использовании двух наборов переменных – консервативных и равновесных. В представленном методе использовалось аналитическое выражение для зависимости между консервативными и равновесными переменными. В настоящей работе предлагается численная сбалансированная реконструкция в случае, когда аналитическое выражение для отображения переменных неизвестно.

Рассмотрим гиперболическую систему законов сохранения с правой частью

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=g(u,x), \tag{1}$$

где $t \in [0, +\infty)$, $x \in R$, $u(x)$, $f(u)$ и $g(u,x)$ – вектор-функции со значениями в R^m.

В общем случае, когда $g(u,x) \neq 0$, стационарные решения системы (1) не являются константами. Их вид определяется стационарным уравнением

$$\frac{\partial f(u)}{\partial x}=g(u,x). \tag{2}$$

В дополнение к консервативным переменным u определим *равновесные переменные* v как постоянные на стационарных решениях. Будем предполагать, что существует взаимно однозначное соответствие $u = U(v,x)$. Для каждого постоянного значения равновесной перемен-ной v_0 соответствующий равновесный профиль $u(x) = U(v_0,x)$ определяется системой обыкновенных дифференциальных уравнений (2).

Если известно среднее значение решения $\overline{u}_j$ в ячейке I_j, то единственный профиль (решение (2)) определяется заданием среднего значения $(\Delta x)^{-1}\int_{I_j} u(x)dx = \bar{u}_j$. При численном решении (2) используется метод коллокации.

WENO реконструкция

Покажем теперь, как можно построить равновесную реконструкцию высокого порядка точности на шаблоне $I_{j-l}^{j+r} \equiv \bigcup_{k=-l}^{r} I_{j+k}$. Сначала вычисляются полиномы $P_j^k(x)$ – равновесные профили на I_{j-l}^{j+r} со средним значением на I_{j+k}, равным $\bar{u}_{j+k}$, то есть для каждого $k=-l,\dots,r$

$$A\frac{dP_j^k}{dx} = g, \quad x \in I_{j-l}^{j+r}, \quad \frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+k}} P_j^k(x)dx = \bar{u}_{j+k}.$$

Далее с помощью этих многочленов формируется равновесная реконструкция

$$R_j(x) = \sum_{k=-l}^{r} q_j^k(x)P_j^k(x),$$

где $q_j^k(x)$ – многочлены степени $l+r$ такие, что

$$\frac{1}{\Delta x}\int_{I_{j+m}} q_j^k(x)P_j^k(x)dx = \bar{u}_{j+k}\delta_{km}, \quad m=-l,\dots,r.$$

WENO реконструкция представляет собой взвешенную комбинацию $R_j(x)$:

$$u_j(x) = \sum_{k=-r}^{l} w_j^k R_{j+k}(x).$$

Веса w_j^k вычисляются по полиномам $R_j(x)$. Построение сбалансированного метода для системы балансовых уравнений завершается применением к полудискретному уравнению метода Рунге – Кутта по временной координате.

Численные расчеты

Для уравнений мелкой воды над неровным дном были построены схемы вплоть до четвертого порядка точности. Для проверки сбалансированности схем рассмотрено распространение малого возмущения по равновесному решению. На интервале [0.55, 0.65] дно имеет возвышение высоты 0.5, глубина слоя жидкости равна 1, начальное возмущение имеет высоту 0.01. На рисунках приведены результаты расчетов по

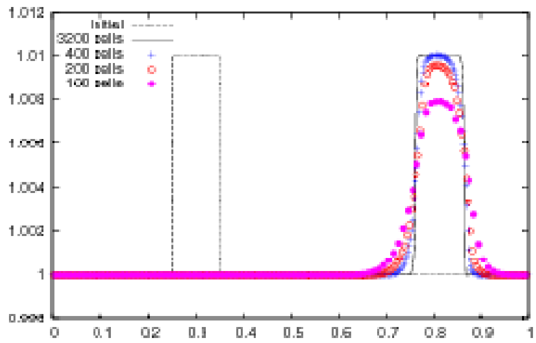

Рис. 1

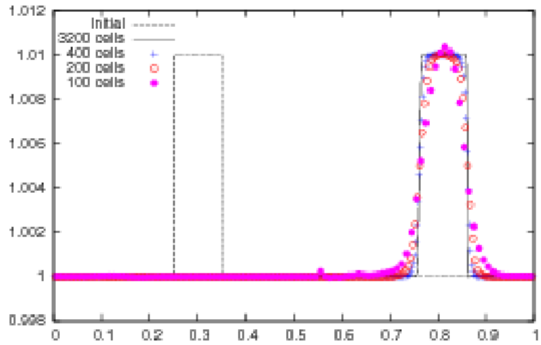

Рис. 2

схемам второго (рис. 1) и четвертого (рис. 2) порядков точности. Тесты на вычисление порядка точности проводились на серии расчетов с гладкими начальными данными на сетках со 100, 200, 400, 800, 1600 и 3200 ячейками и показали ожидаемый порядок сходимости.

Работа выполнена в сотрудничестве с проф. G. Russo (University of Catania, Italy).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-01-00338) и по программе Президента РФ для поддержки ведущих научных школ НШ-4368.2010.1.

Список литературы

1. Greenberg J.M., Leroux A.Y. // SIAM J. Numer. Anal. 1996. Vol. 33. P. 1–16.

2. Russo G., Khe A. // Hyperbolic Problems: Theory, Numerics and Applications: Procs. Symp. Appl. Maths. / Eds. E. Tadmor, J.-G. Liu, A.E. Tzavaras. 2009. V. 67. P. 919–928.

HIGH ORDER WELL-BALANCED SCHEMES FOR HYPERBOLIC SYSTEMS OF BALANCE LAWS

A.K. Khe

The problem of construction of well-balanced schemes for hyperbolic systems of balance laws is considered. A method based on two sets of variables (conservative and equilibrium ones) is presented. We propose a method for the reconstruction of the equilibrium variables when the analytical mapping between the equilibrium variables and the conservative ones is unknown. For a model scalar equation, well-balanced schemes of up to the fourth order are constructed. Numerical results show the well-balanced properties and high order resolution of the schemes.

Keywords: hyperbolic systems, finite volume schemes, well-balanced schemes.