Механика жидкости и газа
Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011, № 4 (3), с. 1252–1254

УДК 532.5

СВОЙСТВА И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОСЛОЙНОЙ СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ МЕЛКОЙ ВОДЫ

© 2011 г.

А.А. Чесноков

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск

chesnokov@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Найдено преобразование, с помощью которого нелинейная система уравнений теории длинных волн, описывающая пространственные колебания многослойной стратифицированной жидкости во вращающемся круговом параболическом бассейне, сведена к обычным уравнениям модели многослойной мелкой воды над ровным неподвижным дном. Это преобразование получено в результате анализа теоретико-групповых свойств уравнений движения вращающейся мелкой воды, а также более общей модели, учитывающей кусочно-постоянную стратификацию жидкости. Наличие у рассматриваемых уравнений движения нетривиальных симметрий позволило провести групповое размножение решений. С использованием известного стационарного вращательно-симметричного решения получен класс периодических по времени решений, описывающий нелинейные колебания в круговом параболоиде с замкнутыми или квазизамкнутыми (эргодическими) траекториями движения жидких частиц.

Ключевые слова: вращающаяся жидкость, стратификация, длинные волны, симметрии, точные решения.

Преобразование модели к уравнениям движения слоистой мелкой воды

Учет силы Кориолиса вносит в гидродинамику новые эффекты, представляющие интерес для приложений в физике океана и атмосферы [1]. На основе нелинейной модели мелкой воды были получены общие результаты о волновом движении жидкости во вращающемся бассейне, выведены уравнения для центра масс, момента инерции и полной энергии движущейся жидкости, а также найдены точные решения в рамках модели с линейным полем скоростей [2, 3]. Изучались нелинейные осесимметричные колебания жидкости в параболоиде вращения и построены классы точных решений уравнений движения, в том числе периодические по времени [4–7], их особенностью является линейная зависимость радиальной компоненты скорости от радиуса. Для систем уравнений, описывающих движение тонкого слоя жидкости над ровным дном с учетом и без учета силы Кориолиса, на основе методов из [8] установлен изоморфизм алгебр Ли допустимых операторов [9] и построены обширные классы точных решений [10]. Свойства симметрии уравнений движения вращающейся мелкой воды [9, 10] позволили преобразовать модель, описывающую пространственные движения тонкого слоя жидкости во вращающемся круговом параболоиде, к обычным уравнениям теории мелкой воды [11]. Установлено, что этот результат допускает обобщение на случай многослойной стратифицированной жидкости и может быть полезен при моделировании рингов и линз.

В приближении длинных волн рассматриваются нелинейные пространственные колебания многослойной стратифицированной жидкости в ограниченном бассейне, вращающемся с постоянной угловой скоростью $f/2$ относительно вертикальной оси z. В цилиндрической системе координат (r, θ, z), вращающейся вместе с бассейном, движение жидкости описывается системой уравнений:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial U_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial U_i}{\partial r} + \frac{V_i}{r}\frac{\partial U_i}{\partial \theta} - \frac{V_i^2}{r} - fV_i - \\
- \frac{f^2 r}{4} + g\frac{\partial}{\partial r}\left(Z + \sum_{k=1}^{i} h_k + \frac{1}{\rho_i}\sum_{k=i+1}^{N}\rho_k h_k \right) = 0, \\
\frac{\partial V_i}{\partial t} + U_i \frac{\partial V_i}{\partial r} + \frac{V_i}{r}\frac{\partial V_i}{\partial \theta} + \frac{U_i V_i}{r} + fU_i + \\
+ \frac{g}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(Z + \sum_{k=1}^{i} h_k + \frac{1}{\rho_i}\sum_{k=i+1}^{N}\rho_k h_k \right) = 0, \\
\frac{\partial h_i}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU_i h_i) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(V_i h_i) = 0.
\end{gathered} \tag{1}
$$

Здесь U_i, V_i – радиальная и окружная компоненты вектора скорости в i-м слое; ρ_i, h_i – плот-

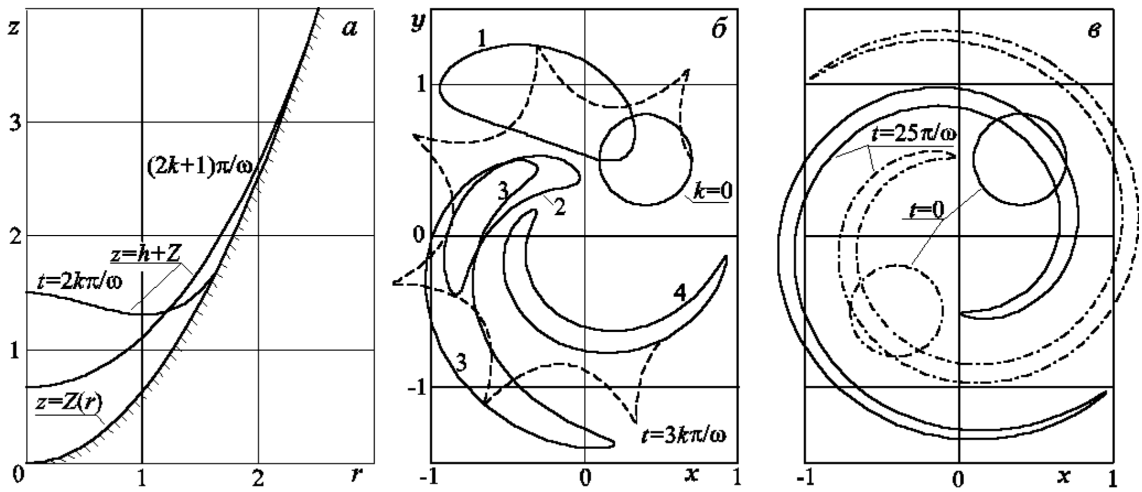

Рис. 1

ность и глубина i-го слоя жидкости ($i = 1, \ldots, N$); постоянные g и f – ускорение свободного падения и параметр Кориолиса; уравнением $z = Z(r, \theta)$ задается рельеф дна. Теоретико-групповой анализ уравнений (1) показывает, что наиболее широкая, 9-мерная группа симметрий допускается только в том случае, когда рельеф дня имеет форму кругового параболоида

$$Z = \frac{\kappa r^2}{2}, \quad \kappa \geq \frac{f^2}{4g}. \tag{2}$$

Теорема. *Система уравнений* (1), *описывающая в длинноволновом приближении движение многослойной стратифицированной жидкости во вращающемся бассейне* (2), *и обычные уравнения теории мелкой воды для слоистых потоков (уравнения* (1) *при* $f = 0$, $Z = const$) *связаны точечным преобразованием*

$$\begin{gathered} t' = \frac{2}{\omega}\operatorname{tg}\frac{\omega t}{2}, \quad r' = \left(\cos\frac{\omega t}{2}\right)^{-1} r, \\ \theta' = \frac{ft}{2} + \theta \quad (\omega = 2\sqrt{g\kappa}), \\ U_i' = U_i \cos\frac{\omega t}{2} + \frac{\omega r}{2}\sin\frac{\omega t}{2}, \\ V_i' = \left(V_i + \frac{fr}{2}\right)\cos\frac{\omega t}{2}, \quad h_i' = h_i\left(\cos\frac{\omega t}{2}\right)^2. \end{gathered} \tag{3}$$

Если набор функций $U_i(t, r, \theta)$, $V_i(t, r, \theta)$, $h_i(t, r, \theta)$ *удовлетворяет уравнениям* (1), (2), *то функции* $U_i'(t', r', \theta')$, $V_i'(t', r', \theta')$, $h_i'(t', r', \theta')$, *определяемые формулами* (3), *являются решением уравнений* (1) *при* $f = 0$, $Z = const$.

Свободные колебания жидкости во вращающемся параболоиде

Выполненный анализ симметрийных свойств уравнений (1), (2) и сформулированная выше теорема дают возможность построения обширных классов точных решений рассматриваемой модели. Приведем пример периодического по времени решения, обладающего функциональным произволом:

$$\begin{gathered} U = \frac{\omega r}{2}\frac{(\alpha^2 - 1)\tau}{1 + \alpha^2\tau^2}, \quad V = v(\tilde{r})\sqrt{\frac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}} - \\ - \frac{fr}{2}\frac{(\alpha - 1)(\alpha\tau^2 - 1)}{1 + \alpha^2\tau^2}, \quad h = \frac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}\tilde{h}(\tilde{r}); \\ \tilde{r} = r\sqrt{\frac{\alpha(1+\tau^2)}{1+\alpha^2\tau^2}}, \quad \tau = \operatorname{tg}\frac{\omega t}{2}; \quad \tilde{h}(r) = \\ = \frac{1}{g}\int_0^r \left(\frac{v^2(r)}{r} + fv(r)\right)dr + h_0 - \frac{\omega^2 - f^2}{8g}r^2. \end{gathered} \tag{4}$$

Здесь v – произвольная гладкая функция, h_0 и a – положительные постоянные. Формулы (4) задают периодическое по времени (период $T = 2\pi/\omega$) решение уравнений (1), (2) в случае $N = 1$ (однородная жидкость) и описывают свободные колебания жидкости во вращающемся круговом параболоиде (рис. 1*а* – рельеф дна и свободная граница). Траектории движения частиц жидкости являются замкнутыми или квазизамкнутыми (эргодическими), а деформация материального контура соответствует образованию спиральных рукавов (рис. 1*б* – деформация материального контура, $t = 3k\pi/\omega$, $k = 0$–4; *в* – материальный контур при $t = 0$ и $t = 25\pi/\omega$), что качественно совпадает с экспериментами [12].

Графики получены при следующем выборе параметров $f = g = h_0 = 1$, $\alpha = 3/2$, $\omega = 5^{1/2}$, $v = 0.27r^2$. Решение (4) допускает «многослойное обобщение».

Работа выполнена при поддержке программы Президиума РАН № 16.7, Интеграционного проекта СО РАН № 65 и РФФИ (грант 10-01-00338).

Список литературы

1. Pedlosky J. Geophysical Fluid Dynamics. Berlin: Springer, 1987. 710 p.
2. Ball F.K. // J. Fluid Mech. 1963. V. 17. P. 240–256.
3. Ball F.K. // J. Fluid Mech. 1965. V. 22. P. 529–545.
4. Ингель Л.Х. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1994. Т. 30, №5. С. 718–720.
5. Свиркунов П.Н. // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 3. С. 520–522.
6. Доценко С.Ф., Рубино А. // Изв. РАН. МЖГ. 2003. №2. С. 158–164.
7. Калашник М.В. и др. // Изв. РАН. МЖГ. 2004. №5. С. 131–142.
8. Овсянников Л.В. Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978. 399 с.
9. Чесноков А.А. // СибЖИМ. 2008. Т. 11, № 3. С. 135–146.
10. Chesnokov A.A. // Europ. J. Appl. Math. 2009. V. 20, No 5. P. 461–477.
11. Чесноков А.А. // ПММ. 2011 (принято к печати).
12. Степанова Е.В., Чашечкин Ю.Д. // Докл. РАН. 2008. Т. 423, № 4. С. 474–478.

PROPERTIES AND EXACT SOLUTIONS OF THE ROTATING SHALLOW-WATER EQUATIONS FOR STRATIFIED MULTILAYERED FLOWS

A.A. Chesnokov

It is shown that the nonlinear system of equations, describing spatial fluctuations of the multilayered stratified shallow liquid in a rotating circular parabolic basin, can be transformed to the classical multilayered shallow water equations. This transformation is obtained as a result of the analysis of symmetry properties of the equations of motion of a rotating liquid and a more general model considering piecewise-constant stratification of a liquid. The existence of the not trivial transformations of the equations of motion has allowed generating new solutions. A new class of periodic solutions, which describes nonlinear fluctuations of the multilayered stratified liquid in a circular paraboloid with closed or ergodic trajectories of liquid particles, is obtained and studied.

Keywords: rotating liquid, stratification, long waves, symmetries, exact solutions.