УДК 532.5

ПЛОСКИЕ СТОКСОВЫ ТЕЧЕНИЯ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

© 2011 г.

С.А. Чивилихин

Санкт-Петербургский госуниверситет информационных технологий, механики и оптики

sergey.chivilikhin@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследуется стоксово течение вязкой жидкости в двухмерной области со свободной границей. Получены строгие ограничения на закон движения свободной границы с учетом капиллярных сил и давления внутри пузырей. В частности, найдена верхняя оценка времени существования конфигурации с заданным числом пузырей.

Ключевые слова: стоксово течение, свободная граница, вариационный принцип, капиллярные силы.

Введение

Плоские стоксовы течения со свободной границей привлекали внимание многих исследователей [1–5]. Полное аналитическое описание этой системы возможно лишь для специальных конфигураций границы. Однако некоторые ограничения для динамики свободной границы могут быть получены для произвольных конфигураций области. В [6] была исследована динамика свободной границы под действием капиллярных сил. В настоящей работе исследовано движение жидкости под действием капиллярных сил и внешнего гидростатического давления.

Уравнения движения в квазистационарном приближении Стокса, уравнение неразрывности и граничные условия имеют вид:

$$\begin{gathered}\partial_\beta p_{\alpha\beta}=0,\quad \partial_\beta v_\beta=0,\quad \mathbf{x}\in g,\\ p_{\alpha\beta}n_\beta=f_\alpha,\quad \mathbf{x}\in\gamma,\end{gathered}\tag{1}$$

где $p_{\alpha\beta}=-p\delta_{\alpha\beta}+\mu(\partial_\alpha v_\beta+\partial_\beta v_\alpha)$ – ньютоновский тензор напряжений; v_α, n_α и f_α – компоненты скорости, вектора внешней нормали к границе и внешней силы, приложенной к поверхности; p – давление, μ – вязкость (которая предполагается постоянной). По дважды повторяющимся индексам проводится суммирование. Пусть γ_0 – внешняя граница области g; γ_m, $k = 1, 2,\ldots, M$, – внутренние компоненты связности границы (границы пузырей),

$$\gamma=\bigcup_{k=0}^{M}\gamma_m.$$

Уравнения и граничные условия (1) могут быть получены из вариационного принципа

$$\delta\left[\frac{1}{4\mu}\int(p_{\alpha\beta}p_{\alpha\beta}-2p^2)dg-\int f_\alpha v_\alpha d\gamma\right]=0.\tag{2}$$

Расчет давления и скорости

Поскольку (2) справедливо при любых малых вариациях давления δp и скорости δv_α, выберем эти вариации таким образом, чтобы тензор напряжений оставался неизменным

$$\delta p_{\alpha\beta}=-\delta p\delta_{\alpha\beta}+\mu(\partial_\alpha\delta v_\beta+\partial_\beta\delta v_\alpha)=0.\tag{3}$$

Введем однопараметрическое семейство вариаций $\delta p = \psi\delta\varepsilon$, $\delta v_\alpha = \chi_\alpha/(2\mu)\delta\varepsilon$, где ψ и χ_α – гладкие поля. Тогда (2), (3) приобретают вид

$$\begin{gathered}\int p\psi dg=-\frac{1}{2}\int f_\alpha\chi_\alpha d\gamma,\\ \frac{1}{2}(\partial_\alpha\chi_\beta+\partial_\beta\chi_\alpha)=\psi\delta_{\alpha\beta}.\end{gathered}\tag{4}$$

Согласно (4), ψ и χ_α представляют собой гармонические функции, связанные соотношением

$$d(\chi_1+\chi_2)=(p+i\omega)dz,$$

где ω – гармоническая функция, сопряженная с p. Пусть ψ_k – полный набор гармонических функций в области g. Представим давление в виде $p=\sum_k p_k\psi_k$. Согласно (4), коэффициенты этого разложения удовлетворяют алгебраической системе уравнений

$$\sum_k\left(\int\psi_k\psi_n dg\right)p_k=-\frac{1}{2}\int f_\alpha\chi_{\alpha n}d\gamma,\quad n=0,1,\ldots$$

Зная распределение давления в области, можно рассчитать скорость на ее границе

$$v_\alpha=\frac{1}{2\mu}\left(e_{\alpha\beta}\int f_\beta d\gamma_m-\sum_k p_k\chi_{\alpha k}\right),\quad \mathbf{x}\in\gamma_m,\tag{5}$$

где интеграл берется вдоль γ_m от фиксированной точки до текущей.

Ограничения на закон движения свободной границы

Рассмотрим течение под действием капиллярных сил на границе и давления p_0, действующего на внешнюю границу области. Будем считать, что гидростатическое давление внутри каждого из пузырей равно нулю. Тогда $f_\alpha = -\sigma n_\alpha \partial_\beta n_\beta - p_m n_\alpha$ (σ – коэффициент поверхностного натяжения). Используя выражение для скорости изменения периметра L области [6]

$$\frac{dL}{dt} = -\int \frac{p + f_\beta n_\beta}{2\mu} d\gamma,$$

соотношения (4) и (5), а также неравенство $S\int p^2 dg \geq \left(\int p dg\right)^2$, где S – площадь области g, получаем дифференциальное неравенство

$$\mu\left(\sigma\frac{dL}{dt} + p_0\frac{dS_b}{dt}\right) \leq -p_0(\sigma L_b + p_0 S_b) - -\frac{1}{S}\left(p_0 S_b + \frac{\sigma}{2}L\right)^2 - \pi\sigma^2(M-1), \quad (6)$$

где S_b, L_b – суммарная площадь и периметр всех пузырей. Для случая отсутствия внешнего давления аналогичное неравенство получено в [6]. Рассмотрим предел бесконечной области. Тогда (6) приобретает вид

$$\mu\frac{dW}{dt} \leq -p_0 W - \pi\sigma^2 M, \quad (7)$$

где $W = \sigma L_b + p_0 S_b$. Из (7) следует неравенство

$$W(t) \leq -\frac{\pi\sigma^2 M}{p_0} + \left(W(0) + \frac{\pi\sigma^2 M}{p_0}\right)\exp\left(-\frac{p_0}{\mu}t\right). \quad (8)$$

Анализ соотношения (8) дает верхнюю оценку времени существования t_M рассматриваемой конфигурации с M пузырями:

$$t_M \leq \frac{\mu}{p_0}\ln\left[1 + \frac{p_0}{\pi\sigma^2 M}(\sigma L_b(0) + p_0 S_b(0))\right].$$

Полученная оценка согласуется с решением для схлопывания одиночного пузыря, имеющего форму кругового цилиндра, под действием капиллярных сил и внешнего давления.

Работа выполнена при поддержке ФЦП, грант №16.740.11.0030.

Список литературы

1. Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1946. Т. 16, №1. С. 29–38.
2. Воинов О.В. // ДАН СССР. 1978. Т. 243. С. 1422–1425.
3. Антоновский Л.К. // ПМТФ. 1988. Т. 3. С. 90–94.
4. Hopper R.W. // J.Fluid Mech. 1990. V. 213. P. 349–375.
5. Richardson S. // Eur.J.Appl.Math. 1992. V. 3, No 3. P. 193–207.
6. Чивилихин С.А. // ДАН СССР. 1990. Т. 315, №3. С. 558–560.

PLANAR STOKES FLOWS WITH A FREE BOUNDARY

S.A. Chivilikhin

Stokes flows of viscous liquid in a two-dimensional region having a free boundary have been investigated. Taking in account the capillary forces and pressure inside the bubbles, strict limitations for the motion of the free boundary are obtained. In particular, the upper estimation for the lifetime of the configurations with a given number of the bubbles is predicted.

Keywords: stokes flow, free boundary, variational principle, capillary forces.