УДК 551.55;532.527

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ГЕНЕРАЦИИ ВОЛН РОССБИ В ЗОНАЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ВБЛИЗИ ПОРОГА УСТОЙЧИВОСТИ

С.В. Шагалов

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород

shagalov@appl.sci-nnov.ru

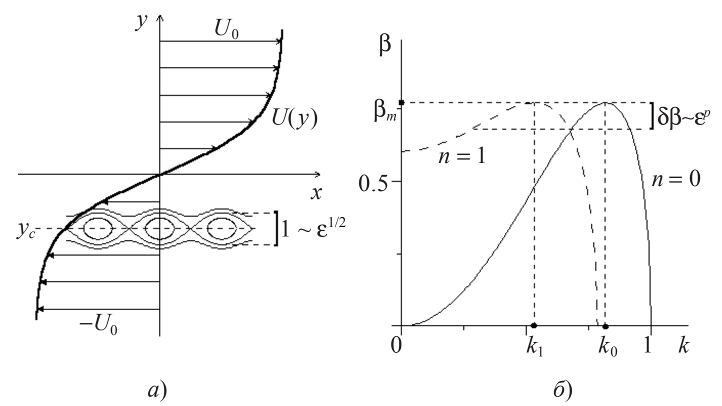
Поступила в редакцию 15.06.2011

Исследуется генерация волновых мод Россби, взаимодействующих с общим критическим слоем в баротропно-неустойчивых, стратифицированных зональных течениях. Для слабонадкритического течения выведены эволюционные уравнения, описывающие совместное развитие волновых амплитуд и возмущений завихренности в нелинейном критическом слое. В рамках качественного и численного анализа полученных уравнений изучается смена сценариев развития неустойчивости и режимов генерации волн при увеличении надкритичности течения.

Ключевые слова: сдвиговое зональное течение, волны Россби, баротропная неустойчивость, нелинейный критический слой, метод сращиваемых асимптотических разложений, эволюционные уравнения, конкуренция мод.

Неустойчивость зональных (ориентированных вдоль географических параллелей) сдвиговых течений играет принципиальную роль в глобальных атмосферных и океанических процессах. Механизм баротропной неустойчивости [1] в слабонадкритических, слабодиссипативных зональных течениях основан на резонансном отборе кинетической энергии течения нарастающими волнами Россби, локализованном в относительно тонком критическом слое (КС), где фазовая скорость волны близка к скорости потока. В работе [2] концепция КС была впервые использована для изучения механизма перехода к турбулентности при возбуждении в потоке спектрально-узких пакетов волн Россби.

В настоящем исследовании подход, развитый в [2], привлекается для построения асимптотической модели генерации волн Россби в слабонадкритическом баротропно-неустойчивом зональном течении в присутствии устойчивой вертикальной стратификации в приближении β-плоскости (см. [1]). Основное сдвиговое течение, ориентированное в зональном направлении x, описывается монотонной антисимметричной зависимостью профиля скорости $U(y)$ от меридиональной координаты y. На рис. 1*а* показана локализация КС на профиле скорости зонального течения в форме свободного слоя сдвига. Для стратификации жидкости вдоль вертикальной оси z принята простая модель с постоянной частотой плавучести. Согласно невязкой линейной теории устойчивости [1], в потоке существуют неустойчивые баротропные и бароклинные волновые моды, если градиент параметра Кориолиса β меньше критического значения $\beta_m = (U'')_{\max}$. На рис. 1*б* пред-



а) *б*)

Рис. 1

ставлены нейтральные кривые баротропной и главной бароклинной мод (сплошная и штриховая линии) для идеального течения с модельным профилем скорости $U = \operatorname{th} y$. В слабонадкритическом течении неустойчивые моды взаимодействуют с общим КС, локализованным в окрестности резонансного уровня $y = y_c$, определенного условием $U(y_c) = c$ (c – фазовая скорость маргинальных мод при $\beta = m$) (см. рис. 1*а*). Надкритичность идеального течения $\delta\beta$ выражается через малый амплитудный параметр ε: $\delta\beta = \beta_m - \beta = \varepsilon^p \beta_1$. Для слабодиссипативного течения параметр вязкости ν определяется посредством скейлинга $\nu = \varepsilon^{3/2}\nu_*$. Скейлинг $\delta\beta$ позволяет отдельно рассмотреть режимы квазистационарного ($p = 1$) и нестационарного ($p =$ $= 1/2$) КС. В рассматриваемом диапазоне значений радиуса деформации Россби [1] внешнее по отношению к КС асимптотическое разложение для квазигеострофической функции тока включает баротропную ($n = 0$) и главную бароклинную ($n = 1$) моды (см. рис. 1*б*):

$$\psi = \int\limits_{y_c}^{y} (U - c)dy' + \varepsilon \left\{ 2\operatorname{Re} \sum_{n=0,1} A_n(\tau_1)\varphi(y) \times \right.$$
$$\left. \times \cos(\pi n z) e^{ik_n \xi} \right\} + \varepsilon^{p+1} \psi^{(p+1)}(\xi, y, z, \tau_1) + \ldots \quad (1)$$

Комплексные амплитуды A_n зависят от медленной переменной $\tau_1 = \varepsilon^p t$; $\xi = x - ct$ – зональная переменная в системе отсчета, сопутствующей маргинальным модам с волновыми числами k_0 и k_1 и меридиональным профилем $\varphi(y)$.

В рамках принятого скейлинга ширина КС $l = \max\{l_\nu, l_n, l_t\} = O(\varepsilon^{1/2})$ (см. рис. 1*а*), где l_ν, l_n, l_t – вязкий, нелинейный и нестационарный масштабы КС [2]. Процедура сращивания разложения (1) с внутренними асимптотическими разложениями в КС (см. [2]) приводит к замкнутой системе уравнений

$$\frac{da_j}{dt} = i\varphi_c^2 \frac{k_j}{J} \int\limits_0^1 \cos(\pi j z)dz \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\langle \Omega e^{-ik_j \xi} \right\rangle d\eta$$
$$(j = 0, 1), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + U_c' \eta \frac{\partial \Omega}{\partial \xi} - 2\operatorname{Re}\left\{ \sum_{n=0,1} ik_n a_n \cos(\pi n z) e^{ik_n \xi} \right\} \times$$
$$\times \frac{\partial \Omega}{\partial \eta} = F(\xi, z, t) + \nu \frac{\partial^2 \Omega}{\partial \eta^2}. \quad (3)$$

Уравнения (2), (3) описывают совместную эволюцию амплитуд неустойчивых волновых мод и порождаемых ими в КС возмущений завихренности $\Omega = \Omega(\xi, \eta, z, t)$. Здесь F содержит линейные и квадратичные по a_j слагаемые, $a_j = \varepsilon\varphi_c A_j$, $\eta = y - y_c$, $\langle \ldots \rangle$ означает локальное усреднение по ξ.

Показано, что для достаточно малых значений надкритичности ($\delta\beta \ll \nu^{2/3}$) реализуется режим слабонелинейного КС и система (2), (3) сводится к двум связанным уравнениям Ландау–Стюартсона

$$\frac{da_j}{dt} = \gamma_j a_j + a_j \sum_l \rho_{jl} |a_l|^2 +$$
$$+ a_j \sum_{l,m} \alpha_{jlm} |a_l|^2 |a_m|^2 \quad (j = 0, 1). \quad (4)$$

Нелинейное взаимодействие между модами в КС в этом случае приводит к подавлению бароклинной моды и насыщению неустойчивости в режиме стационарной генерации баротропной моды. На рис. 2*а* представлен фазовый портрет системы (4), иллюстрирующий подавление бароклинной моды в режиме слабонелинейного КС. При более высоком уровне надкритичности ($\delta\beta = O(\nu^{1/3})$) неустойчивость развивается в режиме нестационарного нелинейного КС.

Уравнения (4) в этом случае неприменимы; в результате численного анализа исходных уравнений (2), (3) установлено, что в потоке реализуется режим межмодовой конкуренции, при котором в зависимости от начальных условий выживает одна из мод. На рис. 2*б*, *в* изображена эволюция во времени нормированных волновых ам-

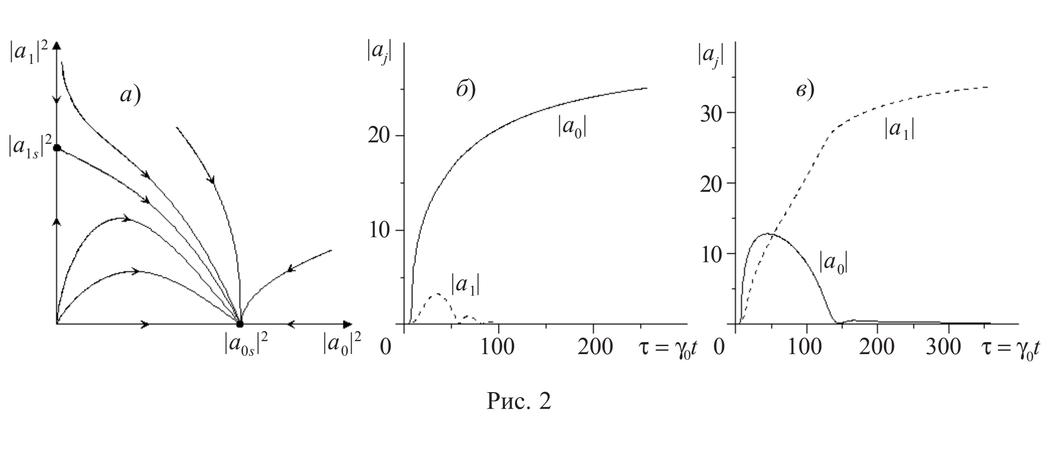


Рис. 2

плитуд $\underline{a}_j = a_j / U_c' l_\nu^2$ в режиме нестационарного нелинейного КС при различных начальных условиях.

Автор выражает благодарность Г.В. Рыбушкиной за помощь, оказанную при проведении численных расчетов.

Список литературы

1. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1, 2.

2. Шагалов С.В., Реутов В.П., Рыбушкина Г.В. // Изв. РАН Физика атмосферы и океана. 2010. Т. 46, №1. С. 1–14.

AN ASYMPTOTIC ANALYSIS OF THE GENERATION OF ROSSBY WAVES IN ZONAL FLOWS NEAR THE ONSET OF THE INSTABILITY

S.V. Shagalov

Generation of self-excited Rossby wave-modes due to their interaction with the common critical layer of a barotropically unstable stratified zonal flow is studied. The evolution equations governing the simultaneous development of the wave amplitudes and vorticity perturbations inside the nonlinear critical layer are derived for a weakly supercritical flow. The scenarios of the instability development and equilibrium states of generating the waves emerging successively as the supercriticality is increased have been studied within the frame of qualitative and numerical analysis of the derived equations.

Keywords: zonal shear flow, Rossby waves, barotropic instability, nonlinear critical layer, method of the matched asymptotic expansions, evolution equations, mode competition.