УДК 517.53

АНАЛИТИКО-ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ СРЕДСТВА КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА

А.В. Юрлова

Вычислительный центр им. А.А. Дородницына РАН, Москва

gav83@yandex.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложен аналитико-численный метод построения приближенных решений краевых задач для системы уравнений Навье–Стокса, описывающей динамику несжимаемой вязкой жидкости в случае трехмерного стационарного течения. Предлагаемый метод основывается на использовании средств многомерного комплексного анализа при записи исходных уравнений в комплексной форме. Проведен ряд численных экспериментов.

Ключевые слова: уравнение Навье–Стокса, трехмерное стационарное течение, многомерный комплексный анализ.

Рассматриваются краевые задачи для трехмерной системы уравнений Навье–Стокса, описывающей динамику несжимаемой вязкой жидкости в случае стационарного течения [1]:

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial P}{\partial x_1}+\mu\Delta V_1=\rho\left(V_1\dfrac{\partial V_1}{\partial x_1}+V_2\dfrac{\partial V_1}{\partial x_2}+V_3\dfrac{\partial V_1}{\partial x_3}\right), \\ -\dfrac{\partial P}{\partial x_2}+\mu\Delta V_2=\rho\left(V_1\dfrac{\partial V_2}{\partial x_1}+V_2\dfrac{\partial V_2}{\partial x_2}+V_3\dfrac{\partial V_2}{\partial x_3}\right), \\ -\dfrac{\partial P}{\partial x_3}+\mu\Delta V_3=\rho\left(V_1\dfrac{\partial V_3}{\partial x_1}+V_2\dfrac{\partial V_3}{\partial x_2}+V_3\dfrac{\partial V_3}{\partial x_3}\right), \\ \dfrac{\partial V_1}{\partial x_1}+\dfrac{\partial V_2}{\partial x_2}+\dfrac{\partial V_3}{\partial x_3}=0, \quad (x_1,x_2,x_3)\in G, \end{cases} \tag{1}$$

где $\Delta=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2$ – оператор Лапласа, V_j – компоненты вектора скорости, P – гидростатическое давление, μ – коэффициент динамической вязкости, ρ – плотность жидкости, G – ограниченная односвязная область. На границе γ области G задается поле вектора скорости $\mathbf{g}=(g_1, g_2, g_3)$, удовлетворяющее условию

$$\int_\gamma (\mathbf{g},\mathbf{n})ds=0.$$

Трехмерная область G рассматривается как сечение четырехмерной области Ω гиперплоскостью $x_4=0$ в четырехмерном пространстве с координатами x_1, x_2, x_3, x_4, что позволяет использовать двумерное комплексное пространство с координатами $z_1=x_1+ix_2$, $z_2=x_3+ix_4$. При этом построение области Ω по заданной области G неоднозначно. Например, если G представляет собой трехмерный цилиндр, то в качестве области Ω можно рассматривать четырехмерный цилиндр с образующей, параллельной оси x_4, или бикруг [2]. Разумеется, можно рассматривать и другие расширения области G в четырехмерное пространство. Рассмотрены такие трехмерные области течения G, которые допускают расширение до четырехмерной области Ω, имеющей оболочку голоморфности в виде бикруга [2].

Система (1) записывается в комплексной форме:

$$\begin{cases} -2\dfrac{\partial P}{\partial \bar z_1}+4\mu\Delta W_1=\rho\left(W_1\dfrac{\partial W_1}{\partial z_1}+\overline{W}_1\dfrac{\partial W_1}{\partial \bar z_1}+\right. \\ \left.+W_2\dfrac{\partial W_1}{\partial z_2}+\overline{W}_2\dfrac{\partial W_1}{\partial \bar z_2}\right), \\ -2\dfrac{\partial P}{\partial \bar z_2}+4\mu\Delta W_2=\rho\left(W_1\dfrac{\partial W_2}{\partial z_1}+\overline{W}_1\dfrac{\partial W_2}{\partial \bar z_1}+\right. \\ \left.+W_2\dfrac{\partial W_2}{\partial z_2}+\overline{W}_2\dfrac{\partial W_2}{\partial \bar z_2}\right), \\ \dfrac{\partial W_1}{\partial z_1}+\dfrac{\partial \overline{W_1}}{\partial \bar z_1}+\dfrac{\partial W_2}{\partial z_2}+\dfrac{\partial \overline{W_2}}{\partial \bar z_2}=0, \end{cases} \tag{2}$$

где $W_1=V_1+iV_2$, $W_2=V_3+iV_4$ (здесь V_4 – специально введенная фиктивная четвертая компонента вектора скорости), гидростатическое давление P рассматривается как комплекснозначная функция.

Искомые комплекснозначные функции W_1, W_2, P ищутся в виде разложений по степеням комплексно сопряженных переменных с коэффициентами, представляющими собой голоморфные функции:

$$W_1 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_{i,j}(z_1, z_2)\,\bar{z}_1^i \bar{z}_2^j,$$

$$W_2 = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \psi_{i,j}(z_1, z_2)\,\bar{z}_1^i \bar{z}_2^j, \tag{3}$$

$$P = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \chi_{i,j}(z_1, z_2)\,\bar{z}_1^i \bar{z}_2^j.$$

Поскольку оболочка голоморфности области Ω является (по предположению) бикругом, любая функция, голоморфная в Ω, разлагается в этой области в ряд Тейлора. Таким образом, тейлоровские коэффициенты голоморфных функций, входящих в разложения (3), определяют решение исходной краевой задачи.

При построении приближенных решений краевых задач в разложениях (3) удерживается конечное число членов, а голоморфные функции, входящие в эти разложения, приближаются отрезками своих рядов Тейлора. Тейлоровские коэффициенты находятся приближенно из условия минимума «суммарной невязки», складывающейся из среднеквадратичных невязок граничных условий, среднеквадратичной невязки комплексифицированой системы уравнений Навье–Стокса и невязки условия вещественности «комплексного поля давления» P.

С использованием предложенного подхода проведен ряд расчетов течений в областях различных конфигураций.

Список литературы

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973.

2. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч. II. М.: Наука, 1976.

3. Александрович А.И. Применение теории функций двух комплексных переменных к решению пространственных задач теории упругости // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1977. №2. С. 164–168.

THE ANALITICAL-NUMERICAL METHOD FOR SOLVING BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THREE-DIMENSIONAL NAVIER–STOKES EQUATIONS USING COMPLEX ANALYSIS

A.V. Yurlova

We investigate boundary-value problems for the Navier–Stokes equations describing three-dimensional stationary flow of viscous incompressible fluid. An analitical-numeric method using the function theory of several complex variables is used to analyze such problems. The method is based on the complexification of the equations under investigation. Results of numerical experiments are presented.

Keywords: Navier – Stokes equations, three-dimensional stationary flow, function theory of several complex variables.