УДК 51.73;532.5;550.344.4;551.46

СКАЛЯРНОЕ ОПИСАНИЕ ТРЕХМЕРНЫХ ВИХРЕВЫХ ТЕЧЕНИЙ

Е.И. Якубович[1], *Ю.А. Степанянц*[2]

[1]Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород
[2]University of Southern Queensland, Toowoomba (Australia)

sevayak@gmail.com

Поступила в редакцию 15.06.2011

Предложен новый вариант описания трехмерных вихревых течений несжимаемой вязкой жидкости с помощью одной скалярной функции. Выведены уравнения для этой функции. Предлагаемый метод позволяет описывать течения с двухкомпонентным полем завихренности. Представлен пример, иллюстрирующие данный метод.

Ключевые слова: вязкая жидкость, вихревые течения, квазипотенциал, интеграл Бернулли, точные решения.

При исследовании течений несжимаемой жидкости наибольшего успеха удается достичь в тех случаях, когда векторные уравнения движения для поля течения $\mathbf{V}(x, y, z, t)$ сводятся к одному уравнению для некоторой скалярной функции. Соответствующая скалярная функция при этом может быть либо гидродинамическим потенциалом, либо функцией тока. В первом случае круг решаемых задач ограничен только потенциальными течениями, тогда как во втором случае течения могут быть и вихревыми, но при этом эффективно двумерными.

Предлагается третий вариант описания течений несжимаемой вязкой жидкости с помощью одной скалярной функции. Предлагаемый подход применим и к трехмерным течениям, не обладающим какими-либо симметриями и зависящим от всех трех пространственных координат. Единственное используемое здесь предположение – это равенство нулю одной из компонент завихренности. Данный подход не зависит от выбора системы координат, однако для простоты ниже используется декартова система координат.

Из уравнения непрерывности несжимаемой жидкости, div $\mathbf{V} = 0$, непосредственно следует, что поле скорости можно представить через вектор-потенциал $\mathbf{V} = \mathrm{rot}\,\mathbf{A}$. Из-за градиентной инвариантности вектор-потенциала без ограничения общности одну из его компонент можно сделать равной нулю. После этого введем существенное предположение о бездивергентности вектор-потенциала, div $\mathbf{V} = 0$. Данное допущение, естественно, ограничивает класс рассматриваемых течений. Отсюда видно, что двухкомпонентный вектор-потенциал выражается через одну скалярную функцию $\sigma(x, y, z, t)$ следующим образом: $\mathbf{A} = (\partial\sigma/\partial y)\mathbf{i} - (\partial\sigma/\partial x)\mathbf{j}$. Данное ограничение приводит к тому, что поле завихренности также является двухкомпонентным, при этом поле скорости остается трехмерным. Можно убедиться в том, что в выражения для полей скорости и завихренности функция σ входит лишь в виде производной $\partial\sigma/\partial z$. Поэтому естественно ввести обозначение $\Phi = \partial\sigma/\partial z$; функцию Φ будем называть квазипотенциалом. Тогда поля скорости и завихренности выражаются через квазипотенциал следующим образом:

$$\mathbf{V} = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \left[\frac{\partial\Phi}{\partial z} + H\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\right]\mathbf{k} = \nabla\Phi + H\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\mathbf{k}, \tag{1}$$

$$\omega = \frac{\partial H}{\partial y}\mathbf{i} - \frac{\partial H}{\partial x}\mathbf{j} = H'\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{i} - \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{j}\right), \tag{2}$$

где $H(x)$ есть произвольная функция своего аргумента. Из этих формул легко видеть, что в частном случае, когда $H(\Phi_z) \equiv 0$, поле скорости является потенциальным, а завихренность тождественно обращается в нуль.

Подстановка поля скорости в уравнение непрерывности приводит к уравнению:

$$\Delta\Phi = -\frac{\partial H}{\partial z} \text{ или } \Delta\Phi = -H'\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}. \tag{3}$$

Подставляя затем поле скорости (1) в уравнение Навье – Стокса, получаем из первых двух его компонент интеграл движения (обобщенный интеграл Бернулли):

$$\frac{p+\varphi}{\rho}+\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\Phi)^2}{2}+$$
$$+\int H(\Phi_z)\,d\Phi_z-\nu\Delta\Phi=R(z,t), \qquad (4)$$

где φ есть потенциал внешней силы, а $R(z, t)$ – произвольная функция своих аргументов, определяемая граничными условиями. Из третьей компоненты уравнения Навье – Стокса с учетом формулы (4) следует еще одно соотношение, которому должен удовлетворять квазипотенциал:

$$H'\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t}+\frac{(\nabla\Phi)^2}{2}+\int H(\Phi_z)\,d\Phi_z\right]=$$
$$=\nu\Delta H-\frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (5)$$

Уравнение (4) естественным образом переходит в известное уравнение Бернулли для потенциальных течений, если положить $H(\Phi_z)\equiv$ $\equiv 0$ и пренебречь вязкостью ($\nu = 0$), а функцию $R(t)$ считать зависящей только от времени. Таким образом, чтобы построить поле скорости течения и найти затем соответствующие ему поля завихренности и давления, необходимо решить уравнения (3) и (5) для квазипотенциала, а затем воспользоваться уравнениями (1), (2) и (4).

Наиболее простой вид система уравнений (3), (5) принимает в случае, когда функция $H(\Phi_z)$ линейно зависит от своего аргумента: $H(\Phi_z) =$ $= \lambda\Phi_z$; тогда имеем два следующих уравнения:

$$\Delta\Phi=-\lambda\Phi_{zz};\quad \frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{(\nabla\Phi)^2}{2}+\frac{\lambda}{2}(\Phi_z)^2+$$
$$+\nu\lambda\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=-\frac{R(z,t)}{\lambda}+Q(x,y,t), \qquad (6)$$

где $Q(x,y,t)$ – произвольная функция.

Легко проверить, что простым частным решением уравнений (6) является следующая функция:

$$\Phi(x,y,z,t)=\exp\left(\frac{-\nu\lambda k^2 t}{1+\lambda}\right)\times \qquad (7)$$
$$\times\left[A\exp\left(\frac{kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\sin kx+B\exp\left(\frac{-kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\sin ky\right],$$

где A и B – произвольные константы. При этом функции $Q(x,y,t)$ и $R(z,t)$ имеют вид:

$$Q(x,y,t)=-ABk^2\sin kx\sin ky\exp\left(-2\nu k^2 t\frac{\lambda}{1+\lambda}\right),$$

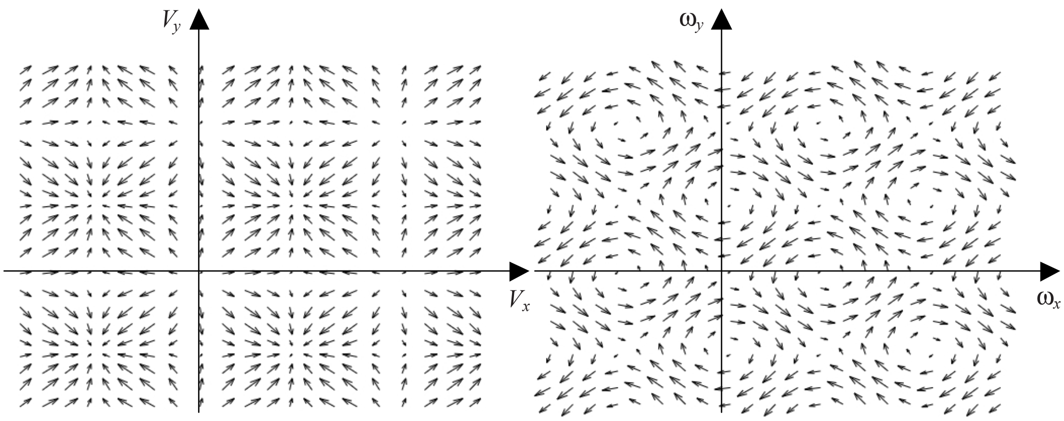
$$R(z,t)=-\frac{\lambda k^2}{2}\left[A^2\exp\left(\frac{2kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)+\right.$$
$$\left.+B^2\exp\left(\frac{-2kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\right]\exp\left(\frac{-2\nu\lambda k^2 t}{1+\lambda}\right).$$

Поля скорости и завихренности легко находятся по функции (7) с помощью формул (1) и (2):

$$U=k\exp\left(\frac{-\nu\lambda k^2 t}{1+\lambda}\right)\times$$
$$\times\left\{\left[A\exp\left(\frac{kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\cos kx\mathbf{i}+B\left(\frac{-kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\cos ky\mathbf{j}\right]+\right.$$
$$\left.+\left[A\exp\left(\frac{kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\sin kx-B\left(\frac{-kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\sin ky\right]\mathbf{k}\right\}, \qquad (8)$$

$$\boldsymbol{\omega}=-\frac{\lambda k^2}{\sqrt{1+\lambda}}\exp\left(\frac{-\nu\lambda k^2 t}{1+\lambda}\right)\left[B\exp\left(\frac{-kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\cos ky\mathbf{i}+\right.$$
$$\left.+A\exp\left(\frac{kz}{\sqrt{1+\lambda}}\right)\cos kx\mathbf{j}\right]. \qquad (9)$$

На рис. 1 показаны две компоненты поля скорости (*а*) и поле завихренности (*б*) в плоскости $z = 0$, рассчитанные по формулам (8) и (9) соответственно в заданный момент времени t.



а) *б*)

Рис. 1

SCALAR DESCRIPTION OF THREE-DIMENSIONAL VORTEX FLOW

E.I. Yakubovich, Yu.A. Stepanyants

A new approach is proposed for the description of three-dimensional vortex flows of incompressible viscous fluid with a singular scalar function. The equations for this function were derived. The proposed method allows describing the flows with two-component vorticity field. The example illustrating the method are presented in this article.

Keywords: viscous fluid, vortex flows, quasi-potential, Bernoulli integral, exact solutions.