УДК 533.9

ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ГИДРОДИНАМИКА ДВУХЖИДКОСТНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2011 г.

М.Б. Гавриков, А.А. Таюрский

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

tayurskiy2001@mail.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассмотрена замкнутая система двухжидкостных гидродинамических уравнений квазинейтральной плазмы, самосогласованная с динамикой квазистационарного поля, в полном объеме учитывающая электрон-ионную структуру плазмы. Дан анализ ряда важных физических процессов на основе этой системы. К ним относятся закономерности распространения нелинейных волн в плазме, задачи плазмостатики, ускорения плазмы в каналах, особенности сжатия плазменного шнура и аномальное ускорение заряженных частиц в Z-пинчах.

Ключевые слова: МГД-уравнения, ЭМГД-уравнения, равновесная конфигурация, инерция электронов, Z-пинч, плазменный шнур, скиновая длина, ускорение плазмы, дисперсионное уравнение, уединённая волна.

Рассмотрена двухжидкостная гидродинамическая модель нерелятивистской двухкомпонентной полностью ионизованной плазмы, состоящая из следующих уравнений электромагнитной гидродинамики (ЭМГД):

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\mathbf{U}=0,\quad \frac{\partial\rho\mathbf{U}}{\partial t}+\mathrm{div}\Pi=0,\quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\mathbf{U}\cdot\nabla,$$
$$\frac{dp_\pm}{dt}+\gamma p_\pm\mathrm{div}\mathbf{U}\pm\lambda_\mp\rho^{\gamma-1}\mathbf{j}\nabla\left(\frac{p_\pm}{\rho^\gamma}\right)=(\gamma-1)\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{j^2}{\sigma},$$
$$\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=0,\quad \mathbf{j}=\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\,\mathbf{H},\quad \mathrm{div}\,\mathbf{H}=0, \tag{1}$$
$$\mathbf{E}+\frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}=\frac{\mathbf{j}}{\sigma}-\frac{1}{c}[\mathbf{U},\mathbf{H}]+\frac{1}{\rho}\mathrm{div}\,\mathrm{W},$$

где для простоты электроны и ионы считались идеальными политропными газами с общим показателем адиабаты γ, $\rho=\rho_++\rho_-$, $\mathbf{U}=(\rho_+\mathbf{v}_++\rho_-\mathbf{v}_-)/\rho$, $\lambda_\pm=m_\pm/e_\pm$, σ – спитцеровская проводимость, а индексы $\pm$ относятся к параметрам ионов и электронов. Тензоры плотности потока импульса «холловских напряжений» W имеют вид:

$$\Pi=\Pi^h+\Pi^p+\Pi^c,\quad \mathrm{W}=(\lambda_--\lambda_+)(\Pi^p+\Pi^c)+$$
$$+(\lambda_-p_+-\lambda_+p_-)\mathrm{I}_3+\lambda_+\lambda_-(\mathbf{j}\cdot\mathbf{U}+\mathbf{U}\cdot\mathbf{j}),$$
$$\Pi^h=\rho\mathbf{U}\mathbf{U}+(p_++p_-)\mathrm{I}_3, \tag{2}$$
$$\Pi^p=\frac{H^2}{8\pi}\mathrm{I}_3-\frac{\mathbf{H}\cdot\mathbf{H}}{4\pi},\quad \Pi^c=\lambda_+\lambda_-\frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}}{\rho}.$$

Коэффициенты системы (1), (2) зависят от скиновой длины $l_c=c/\omega_p$ ($\omega_p=(4\pi\rho\lambda_+^{-1}\lambda_-^{-1})^{1/2}$ – плазменная частота). Уравнения классической магнитной гидродинамики (МГД) получатся, если в (1), (2) удалить все слагаемые, содержащие степень l_c/L_0 (т.е. те, в которые ρ входит в знаменателе), а уравнения холловской МГД – если удалить слагаемые, содержащие степени l_c/L_0 выше первой (формально достаточно положить в (1), (2) $m_-=0$, $\lambda_-=0$). В частности, $\Pi_{\text{МГД}}=\Pi^H_{\text{МГД}}=\Pi^h+\Pi^p$, $\mathrm{W}_{\text{МГД}}=0$, $\mathrm{W}^H_{\text{МГД}}=-\lambda_+(\Pi^p+p_-\mathrm{I}_3)$.

Принципиальная особенность ЭМГД – нелокальная зависимость электрического поля $\mathbf{E}$ от остальных параметров плазмы: согласно обобщенному закону Ома, в (1) значение $\mathbf{E}$ в любой точке зависит от значений остальных параметров во всей области, занятой течением.

Рассмотрены важнейшие свойства плазменной сплошной среды, подчиняющейся ЭМГД-уравнениям.

Прежде всего, это наличие пространственной дисперсии у ЭМГД-плазмы, которая приводит, с одной стороны, к возникновению нелинейных колебаний плазмы (в частности, уединенных волн), а с другой, – к ослаблению диффузии магнитного поля, обусловленного магнитной вязкостью. Приводятся дисперсионные уравнения, уравнения нелинейных бегущих волн и рассмотрены некоторые результаты о взаимодействии уединенных волн, полученные численно.

В задачах плазмостатики огромную роль играет «инерционная» сила – $\mathrm{div}\,\Pi^c$, в результате баланс сил в равновесной конфигурации принципиально отличается от аналогичного в классической МГД. Показано, что нахождение равновесных конфигураций сводится к поиску установившихся течений сжимаемого газа в специальном поле сил. Как известно, уравнения для таких течений имеют смешанный тип – эллиптический в дозвуковой области и гиперболический в сверхзвуковой. Дозвуковые «течения» соответствуют плотным конфигурациям, а сверхзвуковые – разреженным. Для осесимметрических задач поиск равновесия сводится к решению двух уравнений второго порядка относительно функций магнитного потока и полного тока. Уравнения Грэда – Шафранова в классической МГД получаются из представленных в настоящем исследовании предельным переходом $l_c/L_0 \ll 1$ (L_0 – характерный линейный масштаб задачи). Расчеты по тэта- и зет-пинчам показывают, что даже при $l_c/L_0 \ll 1$ существуют равновесия, отличающиеся от грэд-шафрановских, например сильно неизоэнтропические или распадающиеся на несколько кусков.

Структура тензора W чрезвычайно важна при анализе установившихся течений в каналах плазменных ускорителей. На примере плоского канала и течения плазмы поперек силовых линий магнитного поля показано, что новое «холловское» слагаемое ~$(\mathbf{j}\cdot\mathbf{U} + \mathbf{U}\cdot\mathbf{j})$ в тензоре W ответственно за мощные ускорение и торможение плазмы в зонах шириной $\sim l_c$, в частности, типичными являются режимы, в которых основное ускорение набирается на входе в канал на длине $\sim l_c$.

Нелокальная зависимость поля $\mathbf{E}$ приводит к появлению новых классов физически интересных решений. Примером являются однородные деформации плазменного шнура. В газовой динамике такие течения исследованы Л.И. Седовым, в классической МГД – А.Г. Куликовским. В двухжидкостной ЭМГД найдены однородные деформации шнура с произвольным законом изменения полного тока $I(t)$. При этом эволюция безразмерного радиуса шнура $w(t)$ определяется полным током из уравнения

$$\ddot{w} - \frac{K}{w^{2\gamma-1}} + \chi\frac{I^2(t)}{w} + \frac{R}{w^3} = 0,$$

где $K > 0$, $\chi > 0$, R – константы, определяемые начальным состоянием плазмы в шнуре. Найденные решения позволяют предложить простые математические модели динамики перетяжечной плазмы шнура в установках типа Z-пинч и плазменный фокус, состоящие из систем обыкновенных дифференциальных уравнений и учитывающие процессы во внешней цепи установки.

Учет двухжидкостной природы плазмы позволяет объяснить ряд «тонких» эффектов динамики плазмы, например, механизм генерации сильного продольного электрического поля в Z-пинчах и, как следствие, аномального ускорения заряженных частиц. Решение модельной задачи позволяет установить в приближении несжимаемой плазмы связь электрического поля и плотности тока в перетяжке:

$$E_z = \frac{j}{\sigma_{\text{эфф}}}, \quad \sigma_{\text{эфф}} = \sigma\left(1 - \frac{2\mathrm{I}_1(G)}{\mathrm{I}_0(G)G}\right),$$

$$G = \frac{r_0\rho}{\lambda_+ + \lambda_-}\left(\frac{\mu_+ + \mu_-}{\mu_+\mu_-\sigma}\right)^{1/2},$$

где $\mu_\pm$ – гидродинамические вязкости электронов и ионов, r_0 – радиус перетяжки, ρ – ее плотность; I_0, I_1 – функции Бесселя мнимого аргумента. Таким образом, $\sigma_{\text{эфф}} < \sigma$ и для типичных параметров перетяжечной плазмы $\sigma_{\text{эфф}} \cong \sigma\cdot 10^{-5}$. Именно вероятное огромное падение эффективной проводимости плазмы приводит к адекватному росту электрического поля и аномальному ускорению электронов и дейтонов в перетяжках.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант № 09-01-00181.

Список литературы

1. Гавриков М.Б., Сорокин Р.В. Однородные деформации двухжидкостной плазмы с учетом инерции электронов // Изв. РАН МЖГ. 2008. Т. 6. С. 156.

2. Gavricov M.B. Savel'ev V.V. Equilibrium configurations of plasma in the approximation of two-fluid magnetohydrodynamucs with electron inertia taken into account // Journal of Mathematical Sciences. 2009. Vol. 163, №1. P. 1–40.

3. Гавриков М.Б., Савельев В.В., Таюрский А.А. Солитоны в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции элетронов // Изв. вузов. ПНД. 2010. Т. 18, №4. С. 132–147.

4. Гавриков М.Б., Таюрский А.А. Вынужденные колебания вязкой несжимаемой плазмы с учетом инерции электронов в круглой трубе // Изв. РАН. МЖГ. 2010. №1. С. 176–192.

ELECTROMAGNETIC HYDRODYNAMICS OF TWO-FLUID PLASMA

M.B. Gavrikov, A.A. Tayurskiy

A closed system of two-fluid hydrodynamic equations is considered in connection with quasi-neutral plasma problems. The model presented takes into account electron-ion structure of the plasma and the quasistationary electromagnetic field. The analysis of numerous important plasma effects, based on mathematical model presented, includes dispersion of linear waves, acceleration in plasma accelerated channels and *Z*-pinch, the appearance of solitary waves with large amplitudes, the existence of equilibrium plasma configurations strongly differing from Grad–Shafranov once, etc.

Keywords: MHD-equations, EMHD-equations, equilibrium configuration, electron inertia, *Z*-pinch, plasma column, skin length, plasma acceleration, dispersion equation, solitary wave.