УДК 532.6

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИКИ КОНТАКТНОЙ ЛИНИИ НА КОЛЕБАНИЯ СЖАТОЙ КАПЛИ

А.А. Алабужев

Институт механики сплошных сред УрО РАН, Пермь,

alabuzhev@icmm.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается поведение сжатой жидкой капли, представляющей собой фигуру вращения, зажатой между двумя плоскими стенками под действием продольных вибраций. Выявлено, что существуют три характерных масштаба частот собственных колебаний. Высокие частоты не зависят от азимутального числа и для прямого равновесного краевого угла соответствуют частотам капиллярных волн на поверхности жидкости. Низкие частоты не зависят от волнового числа и при больших значениях капиллярного параметра совпадают с частотами собственных колебаний цилиндрической капли. Промежуточный характерный масштаб значений частот соответствует основной частоте трансляционной моды собственных колебаний.

Ключевые слова: колебания капли, движение контактной линии, собственные колебания.

Постановка задачи

Рассмотрим собственные колебания капли жидкости с плотностью ρ_i^*, окруженной другой жидкостью с плотностью ρ_e^*. Здесь и в дальнейшем величины с индексом i относятся к капле, с индексом e – к окружающей жидкости. Вся система ограничена двумя параллельными твердыми плоскостями (рис. 1). Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердой поверхностью равен ϑ_0. Краевой угол отсчитывается от нижней твердой поверхности в сторону боковой поверхности капли.

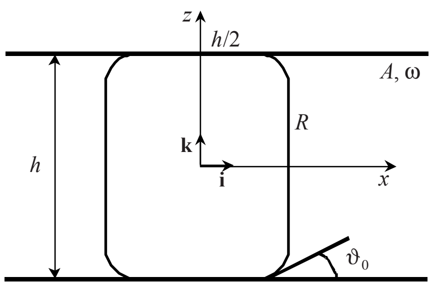

Рис. 1

Выберем в качестве единиц измерения длины $R_0 = R(0)$, высоты h, времени $\sqrt{\rho_e^* R_0 h^2/\sigma}$, скорости $A\sqrt{\sigma/(\rho_e^* R_0 h^2)}$, давления $A\sigma/h^2$, отклонения поверхности A. В пренебрежении вязким затуханием запишем уравнения движения и непрерывности в системе отсчета, связанной с сосудом:

$$p = -\rho\left(\varphi_t + \frac{1}{2}\varepsilon(\nabla\varphi)^2 + \omega^2 r\cos\alpha e^{i\omega t}\right),$$
$$\Delta\varphi = 0. \qquad (1)$$

Уравнения написаны в цилиндрической системе координат (r, α, z). Пусть поверхность капли описывается уравнением $r = R + \varepsilon\zeta(\alpha, z, t)$. На этой поверхности должны выполняться следующие граничные условия

$$r = R + \varepsilon\zeta: \ [\varphi_n] = 0, \quad \zeta_t = \nabla\varphi\cdot\nabla F,$$
$$\varepsilon[p] = -b^{-2}\mathrm{div}\mathbf{n}, \qquad (2)$$

$$z = \mp 1/2: \quad \varphi_z = 0, \qquad (3)$$

$$r = R + \varepsilon\zeta, \ z = \mp 1/2: \zeta_t = \pm\lambda(\zeta_z - \zeta_{0z}),$$
$$\mathrm{ctg}(\vartheta_0) = \zeta_{0z}. \qquad (4)$$

Собственные колебания

Рассмотрим собственные колебания жидкой зоны в случае малой толщины слоя $\beta = h/R \ll 1$. Область течения в капле можно условно разделить на цилиндрическую каплю единичного радиуса и тонкий слой переходной области между каплей и окружающей жидкостью. В переходной области потенциал скорости и давление жидкостей могут претерпевать значительные изменения в направлении, нормальном к поверхности раздела, что требует введения «быстрой» радиальной координаты $r_1 = (r - R(z))/\beta$.

Наиболее высокие частоты имеют колебания с длиной волны, пропорциональной высоте h.

Для таких колебаний контактная линия неподвижна. Наименьшие значения частот относятся к колебаниям с длиной волны, пропорциональной радиусу R. В этом случае контактная линия свободно двигается вдоль твердых поверхностей. Средними значениями частот обладают колебания, длина волны которых пропорционально постоянной Хокинга Λ. Такое движение соответствует трансляционной моде колебаний, которая описывает перемещение центра масс капли.

На рис. 2 представлены вещественная Ω_r и мнимая Ω_i (коэффициент затухания) части комплексной собственной частоты Ω: зависимость частоты (*а*, *в*, *д*) и коэффициентов затухания (*б*, *г*, *е*) для комплексных частот Ω_{10} (*а*, *б*), Ω_{12} (*в*, *г*) и Ω_{20} (*д*, *е*) собственных колебаний от капиллярного параметра при разных значениях равновесного краевого угла ($\rho = 1.33$), $\vartheta_0 = 60^o$ (штрихпунктирная линия), $\vartheta_0 = 75^o$ (штриховая линия), $\vartheta_0 = 90^o$ (сплошная линия). Полученное уравнение имеет комплексные решения, что приводит к затуханию колебаний. Это затухание вызвано лишь условием на линии контакта и не связано с вязкостью. Для основной частоты трансляционной моды существует характерное значение капиллярного параметра. Нулевая частота трансляционной моды при некотором значении λ обращается в нуль (рис. 2*а*). Этому значению соответствует появление двух веток декрементов затухания (рис. 2*б*). Комплексные высокие частоты Ω для 3 различных случаев равновесного краевого угла показаны на рис. 2*в*, *г*. Для низких частот в случае азимутального волнового числа $m = 2$ результаты приведены на рис. 2*д*, *е*.

Были рассмотрены также вынужденные колебания. В предельном случае $\lambda = 0$ амплитуда колебаний на собственной частоте бесконечна. При конечных значениях капиллярного параметра за счет диссипации, имеющей место при движении контактной линии, амплитуда колебаний ограничена.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 08-01-91959-ННИО_а) и МК-2368.2011.1.

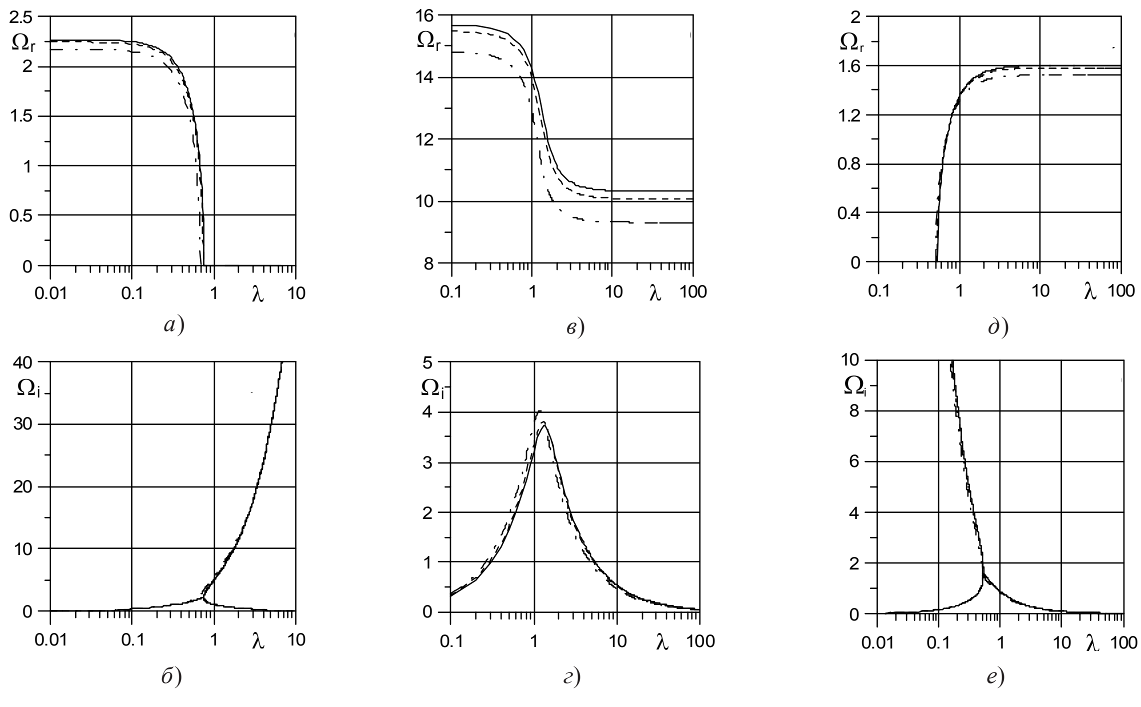

Рис. 2

THE EFFECT OF CONTACT LINE DYNAMICS ON THE OSCILLATIONS OF AN OBLATE DROP

A.A. Alabuzhev

The dynamics of an oblate fluid drop is considered in the report. The drop is suspended in a different fluid and confined by two parallel rigid plates. The external vibration force acts on the system. The vibration axis is perpendicular to the symmetry axis of the drop. The both vibration amplitude and drop's height are small in comparison with the drop's radius. Arbitrary values of equilibrium contact angle are considered. The specific boundary condition is applied to take the dynamics of contact line into account: the contact line's velocity is proportional to the deviation of contact angle. It is found that there exist three different levels of natural frequencies. The highest frequencies have oscillations with a wavelength proportional to the height. For such oscillations the contact line is fixed. The lowest frequencies are vibrations with a wavelength proportional to the radius. In this case, the contact line moves freely along the solid surfaces. Average frequency oscillations have a wavelength which is proportional to the constant Hocking. Such movement corresponds to the translational vibration mode, which describes the movement of the center of mass of the drop. It is found that for finite values of capillary parameters of motion of the contact line leads to damping of free oscillations. The effect of dissipation leads to a limitation of the maximum amplitude at the resonance and to the shift of the resonant frequency. The largest amplitude of forced vibrations is achieved in the case of a direct equilibrium contact angle.

Keywords: drop oscillations, dynamics of contact line, natural oscillations.