УДК 533

ЕСТЕСТВЕННАЯ СИСТЕМА КООРДИНАТ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКИ

С.В. Головин

Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск
Новосибирский госуниверситет

golovin@hydro.nsc.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Для уравнений идеальной магнитной гидродинамики (МГД) предложена естественная криволинейная система координат, координатные линии которой образованы траекториями или линиями тока и магнитными силовыми линиями. При таком подходе удается отделить описание топологии магнитного поля от эволюции движения жидкости: магнитное поле в начальный момент времени определяет систему координат, а эволюция движения находится из решения системы уравнений. В криволинейной системе координат после частичного интегрирования уравнения МГД сводятся к нелинейному векторному волновому уравнению и обобщенному интегралу Коши.

Описан класс решений с постоянным полным давлением. Для стационарных течений доказано, что поверхности, сотканные из линий тока и магнитных линий, являются поверхностями переноса. Они получаются параллельным переносом пространственной кривой вдоль направляющей кривой. Полученные примеры решений обладают функциональным произволом в две функции двух переменных и одну функцию одной переменной.

Ключевые слова: магнитная гидродинамика, точные решения, криволинейные координаты, постоянное полное давление.

Естественная криволинейная система координат

Рассматривается система уравнений магнитной гидродинамики (МГД)

$$\begin{gathered} \rho_t + \mathbf{u}\cdot\nabla\rho + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \\ \rho(\mathbf{u}_t + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}) + \mathbf{B}\times\mathrm{rot}\,\mathbf{B} + \nabla p = 0, \\ \mathbf{B}_t = \mathrm{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{B}), \\ \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор скорости, $\mathbf{B}$ – вектор магнитной индукции, ρ – плотность, p – давление. В случае сжимаемой среды уравнения (1) дополняются уравнением состояния в виде $p = F(\rho, S)$ с энтропией S. Для дальнейшего удобно ввести в рассмотрение полное давление, определяемой формулой $P = p + (1/2)\mathbf{B}^2$.

Уравнение индукции (третье уравнение системы (1)) позволяет (см. [2]) ввести криволинейную систему координат, задаваемую при каждом фиксированном t диффеоморфизмом $\mathbf{x} = \gamma(t,\xi)$, удовлетворяющим следующим соотношениям:

$$\frac{\partial\gamma}{\partial t} = \mathbf{u}, \quad \frac{\partial\gamma}{\partial\xi^1} = \frac{\mathbf{B}}{\rho}. \tag{2}$$

Таким образом, t-линии криволинейной системы координат совпадают с траекториями частиц, а ξ^1-линии – с магнитными силовыми линиями. Для стационарных уравнений аналогичная система координат вводится так, чтобы ξ^1-линии совпадали с линиями тока, а ξ^2-линии – с магнитными силовыми линиями [1]. В криволинейной системе координат система уравнений (1) записывается в виде

$$\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right)^T \left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial\xi^1}\left(\rho\frac{\partial\gamma}{\partial\xi^1}\right)\right) + \frac{1}{\rho}\nabla_\xi P = 0,$$

$$\rho\sqrt{g} = f(\xi^2,\xi^3), \quad \sqrt{g} = \det\left(\frac{\partial\gamma}{\partial\xi}\right). \tag{3}$$

Здесь $(\partial\gamma/\partial\xi)$ – матрица Якоби. В случае несжимаемой среды $\rho = \rho_0$ функция P является искомой.

Для сжимаемой среды уравнения (3) необходимо дополнить уравнением состояния в виде

$$P = F(\rho, S(\xi)) + \frac{1}{2}\rho^2\left|\frac{\partial\gamma}{\partial\xi^1}\right|^2. \tag{4}$$

Решение системы уравнений (3), (4) для отображения $\mathbf{x} = \gamma(t,\xi)$ полностью определяет картину движения. В работе [2] проведена групповая классификация симметрий уравнений (3), (4) относительно уравнения состояния. Показано, как начально-краевая задача для исходных уравнений (1) переписывается для системы (3). Установлены некоторые общие свойства системы (3).

Движения с постоянным полным давлением

В случае несжимаемой жидкости $\rho = \rho_0$ система (3) обладает решениями с постоянным полным давлением $P = \text{const}$. В [1, 2] построены классы таких решений, обладающих широким функциональным произволом для случаев стационарных и нестационарных движений. Показано, что в стационарном случае поверхности, сотканные из линий тока и магнитных силовых линий, являются поверхностями переноса, то есть заметаются параллельным переносом некоторой пространственной кривой вдоль фиксированной направляющей кривой. Обе кривые задаются с функциональным произволом. Приведены примеры струйных, торических и заузленных течений стационарных и нестационарных движений бесконечно электропроводной жидкости, определяемых точными решениями. Пример нестационарного решения, определяющего течение с постоянным полным давлением, приведен ниже:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} = (u(t-\xi^1) + \tau^1(t+\xi^1,\xi^2,\xi^3))\eta^1 + \\ + \tau^2(t+\xi^1, \lambda(t+\xi^1,\xi^2,\xi^3))\eta^2 + \\ + \tau^3(t+\xi^1, \lambda(t+\xi^1,\xi^2,\xi^3))\eta^3.\end{aligned} \tag{5}$$

Здесь $u(t-\xi^1)$ – произвольная функция, $\boldsymbol{\eta}^i$, $i = 1, 2, 3$, – векторы стандартного декартового базиса. Для входящих в (5) функций имеются выражения

$$\begin{gathered}\tau^1 = a(\mu) + B(\xi^2,\xi^3)\sin(\varphi(\mu) + A(\xi^2,\xi^3)), \\ \tau^2 = \lambda\cos k\mu, \quad \tau^3 = \lambda \sin k\mu, \\ \lambda = \sqrt{b(\mu) + B(\xi^2,\xi^3)\cos(\varphi(\mu) + A(\xi^2,\xi^3))}, \\ \mu = t + \xi^1.\end{gathered} \tag{6}$$

Все входящие в (6), не определенные выше, функции являются произвольными. В частности, выбор

$$\begin{gathered}A = \xi^2, \quad B = \xi^3, \quad \varphi = 3\mu, \quad a = \sin 3\mu, \\ b = 3 + \cos 3\mu, \quad k = 2\end{gathered} \tag{7}$$

приводит к решению с магнитной трубкой, изображенной на рис. 1.

Выбор ненулевой функции u в уравнении (5) определяет ее нестационарные возмущения, распространяющиеся вдоль оси трубки и задающие ее смещения в направлении вектора $\boldsymbol{\eta}^1$.

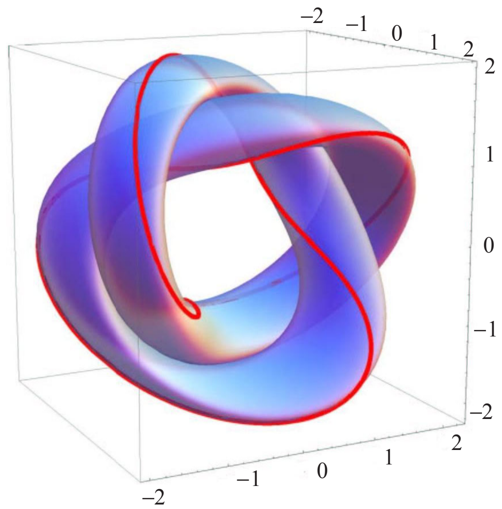

Рис. 1

Работа выполнена при поддержке Президентского гранта МД-168.2011.1, гранта РФФИ № 08-01-00047 и ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» №02.740.11.0617.

Список литературы

1. Golovin S.V. Analytical description of stationary ideal MHD flows with constant total pressure // Phys. Lett. A. 2010. V. 374. P. 901–905.
2. Golovin S.V. Natural curvilinear coordinates for ideal MHD equations. Nonstationary flows with constant total pressure // Phys. Lett. A. 2011. V. 375. P. 283–290.

NATURAL SYSTEM OF COORDINATES AND EXACT SOLUTIONS FOR EQUATIONS OF IDEAL MAGNETOHYDRODYNAMICS

S.V. Golovin

A natural system of coordinates with coordinate curves directed along trajectories and magnetic field lines is presented for equations of ideal magnetohydrodynamics (MHD). In this approach it is possible to separate the description of the topology of the magnetic field from the evolution of the fluid motion: The initial magnetic field prescribes the system of coordinates, while the evolution of the motion is determined by the solution of the system of equations. In natural coordinates the system of MHD equations is partially integrated and reduced to a nonlinear vector wave equation and a generalized Cauchy integral.

A class of solutions with constant total pressure is described. For the stationary flows it is proved that surfaces bearing magnetic lines and streamlines of the flow belong to a class of translational surfaces. They are constructed by the parallel shift of one curve in 3D space along another curve. The obtained explicit exact solutions possess a maximal functional arbitrariness in one function of two arguments and two functions of one argument.

Keywords: magnetohydrodynamics, exact solutions, curvilinear coordinates, constant total pressure.