УДК 532.546

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФИЛЬТРАЦИИ В НЕОДНОРОДНЫХ ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТЫХ СРЕДАХ

Г.В. Голубев

Казанский государственный технический университет им. А.Н. Туполева

golubev@tm.kstu-kai.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

Рассматривается фильтрация в неоднородных трещиновато-пористых средах в рамках модели Баренблатта – Желтова. Считается, что движение жидкости в трещинах описывается нелинейным двучленным законом Форхгеймера в первой форме в виде, разрешенном относительно скорости фильтрации, а движение жидкости в пористых блоках породы – одним из наиболее общих нелинейных законов – законом ДХК. Получено основное уравнение фильтрации в рассматриваемом случае и сформулирована исследуемая задача. Для решения ее предложено использовать или метод сведения к интегро-дифференциальному уравнению, или метод Галеркина с конечными элементами. Рассмотрены различные варианты его применения. Проведены численные расчеты.

Ключевые слова: фильтрация, неоднородные трещиновато-пористые среды, давление, метод Галеркина, пакет Mathcad.

Рассматривается фильтрация в неоднородных трещиновато-пористых средах, представляющих собой совокупность пористых блоков, отделенных друг от друга развитой системой трещин. Жидкость и газ насыщают и проницаемые блоки, где сосредоточены основные запасы углеводородов, и трещины, по которым происходит транспортировка нефтегазового потока к скважинам. При этом размеры трещин значительно превосходят характерные размеры пор, так что проницаемость системы трещин k_1 значительно больше, чем проницаемость системы пор в блоках k_2. При изучении фильтрации в таких средах вызывает интерес изучение следующих вопросов:

1) математическое моделирование процессов фильтрации в неоднородных трещиновато-пористых средах;

2) выбор законов, адекватно описывающих движение жидкостей в трещинах и блоках;

3) вывод основного уравнения фильтрации в трещиновато-пористой среде при различных комбинациях законов движения в трещинах и блоках и определение их типа;

4) создание алгоритмов решения задачи определения поля давлений в неоднородной трещиновато-пористой среде;

5) создание алгоритмов решения задачи определения поля фильтрационного параметра в неоднородной трещиновато-пористой среде;

6) построение индикаторных диаграмм в тех случаях, когда это можно сделать.

Считается, что наиболее адекватно движение жидкости в трещинах описывается нелинейным двучленным законом Форхгеймера. Ссылаются на анализ технической документации месторождений с трещиноватыми коллекторами, эксперименты Фенчера, Льюиса, Бернса и опыты Линдквиста. Закон Форхгеймера в первой форме (экспериментальные данные допускают и вторую форму) записывается в виде

$$\nabla p = -\mu \bar{v}_1 - \beta \mu v_1 \bar{v}_1 / k_1 \qquad (1)$$

или в обращенной форме

$$\bar{v}_1 = -B_1 \nabla p, \qquad B_1 = \left(\sqrt{1+4\beta|\nabla p|k_1/\mu} - 1\right)/2\beta|\nabla p|. \qquad (2)$$

Здесь использованы обозначения: $\bar{v}_1$ – скорость фильтрации, p – давление, μ – вязкость жидкости, β – постоянная. Для движения жидкости в пористых блоках породы используются различные законы, тоже имеющие экспериментальное происхождение: Дарси, параметрический, криволинейный и т.д. Можно предположить, что это связано с типом нефти, насыщающей пористую среду: легкая нефть, обычная нефть марки Urals, вязкопластическая или вязкоупругая жидкости и т.д., а также с характером самой пористой среды. По-видимому, одним из наиболее общих законов нелинейной фильтрации является закон, предложенный В.В. Девликамовым, З.А. Хабибуллиным, М.М. Кабировым.

Немного изменив обозначения, запишем его для фильтрации в блоках в следующем виде:

$$\bar{v}_2 = -k_2 u \nabla p / [\mu_0 + \mu_1 (u-1)],$$
$$u = 1 + \exp c_1 (|\nabla p| - \beta_1), \qquad (3)$$

где $\bar{v}_2$ – скорость фильтрации в блоках; β_1 – градиент, соответствующий началу интенсивного разрушения структуры нефти; c_1 определяет скорость разрушения структуры; μ_0, μ_1 – вязкости нефти до и после разрушения структуры. Условно назовем (3) нелинейным законом ДХК (по первым буквам фамилий предложивших его авторов). Будем считать коэффициенты проницаемости трещин и блоков переменными величинами, функциями координат, давления и градиента давления: $k_i = k_i(x, y, p, |\nabla p|)$, $i = 1, 2$. Для суммарного потока будем иметь

$$\bar{v} = \bar{v}_1 + \bar{v}_2 = -B_2 \nabla p,$$
$$B_2 = \left(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| k_1 / \mu} - 1\right) / 2\beta |\nabla p| +$$
$$+ k_2 u / [\mu_0 + \mu_1 (u-1)]. \qquad (4)$$

Проекции скорости фильтрации суммарного потока на оси координат имеют вид $v_x = -B_2 \partial p / \partial x$, $v_y = -B_2 \partial p / \partial y$. К закону (4) добавляем соотношение, которое получается из уравнения неразрывности и зависимостей плотностей жидкостей и пористой среды от давления. В случае фильтрации несжимаемой жидкости оно имеет вид

$$\partial (h v_x) / \partial x + \partial (h v_y) / \partial y + f = 0, \qquad (5)$$

где толщину пласта h полагаем $h = 1$, f – плотность отбора, t – время. Вычисляя производные $\partial v_x / \partial x$, $\partial v_y / \partial y$ и подставляя их в соотношение (5), придем к основному уравнению фильтрации в рассматриваемом случае, которое в сокращенной форме запишется

$$\partial (B_2 \partial p / \partial x) / \partial x + \partial (B_2 \partial p / \partial y) / \partial y + f = 0. \qquad (6)$$

Равенство (6) можно рассматривать или как уравнение для определения функции давления, или как уравнение для определения фильтрационного параметра. Если изучается первый вариант задачи, то уравнение имеет вид

$$a_{11} \partial^2 p / \partial x^2 + 2 a_{12} \partial^2 p / \partial x \partial y + a_{22} \partial^2 p / \partial y^2 +$$
$$+ H(x, y, p, \partial p / \partial x, \partial p / \partial y) = 0, \qquad (7)$$

где величины a_{11}, a_{12}, a_{22}, H имеют весьма сложную форму. В качестве образца приведем только выражение a_{11}

$$a_{11} = \frac{1}{2\beta |\nabla p|} \left[\left(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} - 1\right) \times \right.$$
$$\times \left(\sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} - 1\right) (\partial p / \partial x)^2 / |\nabla p|^2 +$$
$$+ 2\beta c (\partial p / \partial x)^2 / |\nabla p| \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} +$$
$$\left. + 2\beta (\partial p / \partial x)^2 \partial c / \partial |\nabla p| / |\nabla p|^2 \sqrt{1 + 4\beta |\nabla p| c} \right] +$$
$$+ \left[k_2 \partial k_2 / \partial |\nabla p| (\partial p / \partial x)^2 + k_2 c_1 (\partial p / \partial x)^2 \times \right.$$
$$\left. \times (1 - \mu_1) / |\nabla p| \right] \frac{1 + \exp(c_1 |\nabla p| - \alpha)}{\mu_0 + \mu_1 \exp(c_1 |\nabla p| - \alpha)},$$
$$\alpha = c_1 \beta_1, \quad c = k_1 / \mu.$$

Весьма важным является вопрос о типе уравнения (7), поскольку от этого зависит последующая постановка задачи. Он определяется по знаку дискриминанта $d = a_{12}^2 - a_{11} a_{22}$. Поскольку коэффициенты имеют сложный вид, дискриминант d тоже имеет весьма громоздкую форму. В некоторых случаях знак дискриминанта удается определить с помощью мажорантных оценок. Но при комбинации законов (2), (3) и $k_i = k_i(x, y, p, |\nabla p|)$ этого сделать не удается. Компьютерные расчеты при достаточно широком диапазоне изменения исходных параметров показали, что знак d отрицательный. Отсюда вытекает, что уравнение (7) принадлежит к эллиптическому типу и для него могут ставиться задачи Дирихле, Неймана и смешанная задача.

Формулируется задача определения поля давлений в неоднородной трещиновато-пористой среде. Для решения этой задачи могут быть предложены: 1) метод сведения к интегро-дифференциальному уравнению и решению его последовательными приближениями с удовлетворением краевому условию за счет свободных параметров, 2) различные варианты конечно-элементного подхода (или метода Галеркина с конечными элементами). При применении второго варианта возникают следующие проблемные моменты: выбор элементов и узлов, разбиение области фильтрации на конечные элементы, выбор базисных и весовых функций, получение аппроксимирующей системы уравнений, сходимость приближенного решения к точному при неограниченном увеличении числа элементов. При этом приближенное решение должно удовлетворять требованию, чтобы оно было непрерывным во всей области фильтрации и имело кусочно-непрерывные первые производные. При разбиении области существует много элементов, конкурирующих между собой. Не вполне ясно, что эффективнее - разбить область на треугольные или четырехугольные конечные элементы. Треугольные элементы лучше для аппроксимации криволинейной границы, а четырехугольные, особенно прямоугольные, имеют преимущество внутри области: их меньше и они позволяют строить простые элементы высших степеней. При использовании конечных элементов принципиально новым является выбор базисных функций. Они задаются отдельно для каждого элемента и выбираются в виде функций с конечным носителем. Конечно-элементные разбиения приводят к тому, что матрица аппроксимирующей системы содержит много нулей и это обстоятельство облегчает ее решение. Далее разбирается алгоритм решения изучаемой задачи при использовании треугольных, прямоугольных и смешанных разбиений. Например, при использовании прямоугольных разбиений аппроксимирующая система имеет вид

$$\sum_{i,j} p_{ij} a_{ks}^{ij} = G_{ks} \quad (k=1,2,\ldots,N;\, s=1,2,\ldots,M). \tag{8}$$

Здесь a_{ks}^{ij} есть элемент матрицы A, который вычисляется по формуле

$$a_{ks}^{ij} = \sum_{i,j} \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \int_{y_{j-1}}^{y_{j+1}} \left(2a_{12} \frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial x \partial y} \omega_{xk} \omega_{ys} + H \omega_{xk} \omega_{ys} \right) dxdy$$

$$(k = 1, 2, \ldots, N;\ s = 1, 2, \ldots, M) \tag{9}$$

Здесь узловые параметры p_{ij} фигурируют в качестве коэффициентов перед a_{ks}^{ij} и входят в a_{12} и H. Это нелинейная система алгебраических уравнений, которая решается с помощью пакета Mathcad.

MATHEMATICAL MODELING OF FILTRATION IN AN INHOMOGENEOUS FRACTURED POROUS STRATUM

G.V. Golubev

The problem on determination of a pressure field in a heterogeneous fractured porous stratum is considered. The initial nonlinear differential partial equation with the main divergent part is derived and its type is established. The problem is formulated, and a solution method based on Galerkin finite element method is suggested. A general algorithm and a number of examples are also given.

Keywords: filtration, heterogeneous fractured porous stratum, pressure, Galerkin method, Mathcad.