

УДК 532.5.013.4

## УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЙ КОЛЕБАТЕЛЬНО ВОЗБУЖДЕННЫХ ГАЗОВ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ ПОДХОД

© 2011 г.

Ю.Н. Григорьев<sup>1</sup>, И.В. Ершов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительных технологий СО РАН, Новосибирск

<sup>2</sup>Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет

grigor@ict.nsc.ru

Поступила в редакцию 15.06.2011

В рамках энергетической теории устойчивости сжимаемых течений рассмотрена линейная и нелинейная устойчивость плоскопараллельных течений колебательно неравновесного газа. Показано, что создаваемый термической релаксацией диссипативный эффект существенно повышает устойчивость течений и подавляет вихревые возмущения.

*Ключевые слова:* устойчивость, колебательная неравновесность, уравнение Ландау – Теллера, функционал энергии, критическое число Рейнольдса.

### Линейная устойчивость невязких сдвиговых течений

Математической моделью течений колебательно неравновесного газа служит система уравнений двухтемпературной гидродинамики. Она включает в себя систему Навье–Стокса сжимаемого газа и уравнение Ландау–Теллера, описывающее релаксацию колебательных мод в терминах колебательной температуры:

$$\rho \left( \frac{\partial T_v}{\partial t} + u_i \frac{\partial T_v}{\partial x_i} \right) = \frac{\gamma}{\gamma_v \text{Re Pr}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \lambda_v \frac{\partial T_v}{\partial x_i} \right) + \frac{\rho(T - T_v)}{\tau}.$$

Уравнение состояния записывается через статическую температуру потока  $\gamma M_0^2 p = \rho T$ . Уравнения двухтемпературной газовой динамики (ГД) получаются из нее занулением всех коэффициентов молекулярного переноса. Устойчивость невязких сдвиговых течений рассматривалась в [1] на основе линеаризованной системы ГД. Для интеграла энергии в форме

$$E = \frac{1}{2} \int \left( u^2 + v^2 + M_0^2 p^2 + \frac{\gamma_v T_v^2}{\gamma^2 M_0^2} \right) d\Omega$$

получено уравнение энергетического баланса

$$\frac{dE}{dt} = - \int uv \frac{\partial U_s}{\partial y} d\Omega - \frac{\gamma_v}{\gamma^2 M_0^2} \int \frac{\rho(T - T_v)}{\tau} d\Omega - \frac{3}{2} \frac{1}{\text{Re}_r} \int \frac{(T - T_v)^2}{\gamma \tau} d\Omega,$$

где последний интеграл в правой части положительно определен и в явном виде показывает диссипативный эффект процесса колебательной релаксации, повышающий устойчивость

сжимаемого плоскопараллельного течения по сравнению со случаем идеального газа в локальном термодинамическом равновесии. Изучена устойчивость течений относительно плоских волн  $q \propto \exp[i\alpha(x - ct)]$ , где  $\alpha > 0$  – вещественное волновое число;  $c = c_r + ic_i$  – комплексная фазовая скорость. Для функции давления получено самосопряженное уравнение вида

$$\begin{aligned} [W^{2(n-1)} H' + [\alpha^2 (m^2 M^2 - W^{-2}) W^{2n} + \\ + n W^n (W^{n-3} W')'] = 0, \\ p = W^n H, \quad W = U_s - c \neq 0. \end{aligned}$$

При  $n = 0$  из его квадратичной формы следует первое условие Рэля, необходимое для развития неустойчивости:

$$U_{\min} = a \leq c_r \leq b = U_{\max}.$$

При некотором дополнительном ограничении на ее основе доказывается теорема Ховарда о полукруге, ограничивающем фазовую скорость развивающейся неустойчивости неравенством

$$[c_r - (a + b)/2]^2 + c_i^2 \leq [(a - b)/2]^2.$$

При  $n = 1$  получается соотношение, обобщающее на случай колебательно возбужденного газа известное условие Рэля о необходимости точки перегиба на профиле скорости для развития инерционной неустойчивости. Кроме того, при  $n = 0$  рассчитывались инкременты нарастания возмущений для профиля скорости  $U_s = \text{th } y$ . Показано, что релаксация, подобно сжимаемости, снижает инкременты нарастания неустойчивых мод.

### Критические числа Рейнольдса для плоского течения Куэтта

Для оценки влияния релаксации на критические числа Рейнольдса рассматривалась устойчивость плоского течения Куэтта на основе энергетической теории устойчивости, распространенной авторами на случай течений колебательно возбужденного газа. Из полной системы уравнений двухтемпературной гидродинамики с коэффициентами переноса, зависящими от температуры, выводились уравнения для возмущений гидродинамических переменных. Последние использовались в двух вариантах – линейризованном для малых амплитуд возмущений и нелинейном, без ограничения на амплитуды. Для них строились уравнения энергетического баланса для интеграла энергии в форме

$$E = \frac{1}{2} \int \left[ \rho(u^2 + v^2 + T'^2 + \gamma \gamma_v T'_v) + \frac{1}{\gamma M_0^2} \rho'^2 \right] d\Omega.$$

Отсюда в соответствии с энергетической теорией устойчивости при  $dE/dt = 0$  получались вариационные задачи для критических чисел Рейнольдса  $Re_c$ . Соответствующие уравнения Эйлера–Лагранжа после отделения периодических переменных приводятся к спектральным задачам для систем обыкновенных дифференциальных уравнений, в которых спектральным параметром служит число Рейнольдса. Их анализ показал, что качественные свойства спектров собственных значений для линейризованного и нелинейного случаев совпадают.

Задачи решались численно методом коллокаций с использованием *QZ*-алгоритма. Расчеты показали, что в обоих случаях минимальные

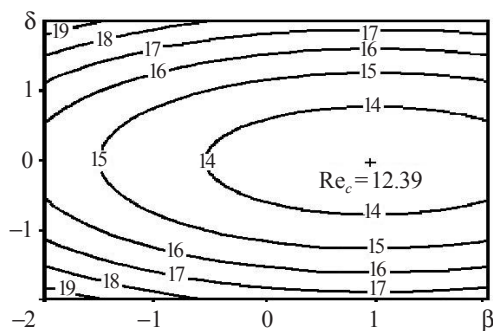


Рис. 1

значения критических чисел Рейнольдса  $Re_c$  достигаются на продольных модах  $\beta > 0$ ,  $\delta = 0$ . На рис. 1 представлены изолинии числа Рейнольдса  $Re(\beta, \delta)$  для числа Маха потока  $M_0 = 0.5$  и объемной вязкости  $\eta_b = 0$ .

На рис. 2 показано, что возрастание степени неравновесности колебательной моды и времени колебательной релаксации приводит к росту значений критических чисел Рейнольдса.

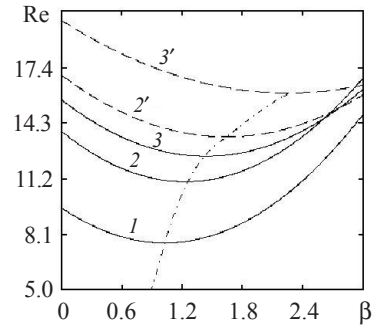


Рис. 2

### Диссипация возмущений при закритических числах Рейнольдса

Для закритических чисел Рейнольдса на основе численного интегрирования полной системы уравнений двухтемпературной гидродинамики исследовано влияние релаксации на развитие неустойчивости Кельвина–Гельмгольца. Рассматривался поток с  $U_s(x_2) = \text{th } y$ ,  $T_s = T_v = 1$ . В качестве начальных возмущений компонент вектора скорости и термодинамических величин использовались рассчитанные в [1] невязкие возмущения с наибольшими инкрементами нарастания. Результаты показывают, что возмущением колебательных мод можно на 10–15% повысить среднюю скорость диссипации кинетической энергии эволюционирующей вихревой структуры.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 08-01-00116.*

#### Список литературы

1. Григорьев Ю.Н., Ершов И.В. Линейная устойчивость невязкого сдвигового течения колебательно возбужденного двухатомного газа // ПММ. 2011 (в печати).

**STABILITY OF VIBRATIONALLY EXCITED GAS FLOWS. ENERGETIC APPROACH**

*Yu.N. Grigoryev, I.V. Ershov*

Linear and nonlinear stability of plane-parallel vibrationally excited gas flows were considered in a framework of the energetic theory. It was shown that the dissipative effect created by thermal relaxation increases essentially the stability of such flows and suppresses vortex disturbances.

*Keywords:* stability, vibrational nonequilibrium, Landau–Teller equation energy functional, critical Reynolds number.