УДК 517.54;621.9.047

ЗАДАЧИ ХЕЛЕ – ШОУ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ПОДВИЖНОСТЬ СВОБОДНЫХ ГРАНИЦ

В.П. Житников, Р.Р. Муксимова, Н.М. Шерыхалина

Уфимский государственный авиационный технический университет

zhitnik@mail.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматриваются плоские задачи потенциального течения жидкости с непроницаемыми или эквипотенциальными подвижными границами. Скорость движения свободной границы прямо пропорциональна градиенту потенциала, если модуль градиента превышает некоторое критическое значение, или равна нулю в противном случае. Данная модель может быть использована при исследовании течений жидкости с растворяемыми (размываемыми) границами, движения грунта при взрыве, процессов электрохимического формообразования и т.д. Впервые для этих целей применяются разрывные функции, что позволяет объяснить экспериментальные результаты и сформулировать новые типы задач.

Ключевые слова: растворяемые границы, нестационарное формообразование, аналитические функции, уравнение типа Полубариновой – Галина с разрывной правой частью, установление стационарных и квазистационарных конфигураций.

Постановка задачи

Рассмотрим пример, в котором жидкость движется в пространстве между вертикальной пластиной $A'CB'$ (рис. 1*а*) и свободной поверхностью ADB, которая в начале процесса считается прямолинейной. Пластина движется вертикально вниз со скоростью V_R. Поле скоростей считается потенциальным и соленоидальным. В этом случае решение задачи можно получить в виде аналитической функции комплексного переменного $w(z, t)$, где $z = x + iy$, $w = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал, φ – потенциал течения, ψ – функция тока, t – время. Тогда скорость жидкости $V = \overline{dw/dz}$. Границы потока считаются непроницаемыми. Поэтому образом области течения на плоскости комплексного потенциала является горизонтальная полоса ширины, равной расходу жидкости Q (рис. 1*б*).

Скорость V_f движения точек свободной границы вдоль внешней нормали

$$V_f = k\,|V|\,\eta, \tag{1}$$

где k – коэффициент; величина h представляется скачкообразной функцией модуля скорости

$$\eta(|V|) = \begin{cases} \eta_0, & |V| > V_1, \\ 0, & |V| < V_1. \end{cases} \tag{2}$$

При моделировании процессов электрохимического формообразования с помощью гидродинамической аналогии [1, 2] равенство (1) следует из закона Фарадея, напряженность электрического поля $E = -iV$, η – выход по току (доля тока, участвующего в реакции растворения металла).

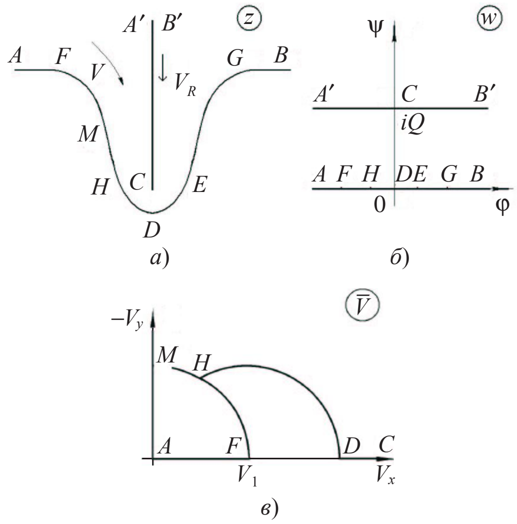

Рис. 1

Задачи решаются в стационарной [3], квазистационарной и нестационарной [4] постановках. В стационарной и квазистационарной задачах на свободной границе предполагается существование зон трех типов. В зоне первого типа HDE, где модуль скорости $|V| > V_1$, образуется стационарная форма. На плоскости годографа $\overline{V}$ (рис. 1,*в*) этой части границы соответствует дуга окружности, проходящей через начало координат [1].

При $|V| < V_1$ границы AF и GB сохраняют исходную конфигурацию, при этом в зависимости от конкретной задачи образом этой части границы на плоскости $\overline{V}$ является часть действительной или мнимой оси. Существенным элементом таких задач является наличие переходной зоны FMH (и симметричной ей EG), в которой $|V| = V_1$. На плоскости $\overline{V}$ соответствующая часть границы представляется дугой окружности с центром в начале координат.

Методом годографа решен ряд задач с различной формой жесткой части границы. При решении применялся метод коллокаций, в некоторых случаях получены точные решения.

Метод решения нестационарной задачи

Для решения нестационарных задач формулируется краевое условие для определения аналитической функции – частной производной $\partial z(\chi, t)/\partial t$ в виде уравнения [2] типа Полубариновой–Галина с разрывной (согласно (2)) правой частью

$$\operatorname{Im}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\overline{\frac{\partial z}{\partial \sigma}}\right) = -k\eta(|V|)\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma}. \qquad (3)$$

Применялся численно-аналитический метод решения, изложенный в [2], который состоит в определении на каждом шаге по времени двух аналитических функций: функции $z(\chi, t)$, реализующей конформное отображение с некоторой области изменения параметрического переменного (например, полосы $\chi = \sigma + i\upsilon$) на физическую плоскость, и частной производной $\partial z(\chi, t)/\partial t$, которая позволяет по текущей конфигурации границы рассчитать ее дальнейшее изменение.

Численные результаты

С помощью этого метода было проведено численное решение ряда задач. Результаты численных исследований показали, что, несмотря на отсутствие дополнительных допущений, наблюдается формирование стационарной и переходной (с $|V| = V_1$) зон (рис. 2*а*, *б*). Сравнение нестационарного и квазистационарного решений (рис. 2*в*) показало их совпадение с высокой точностью (до 3 значащих цифр).

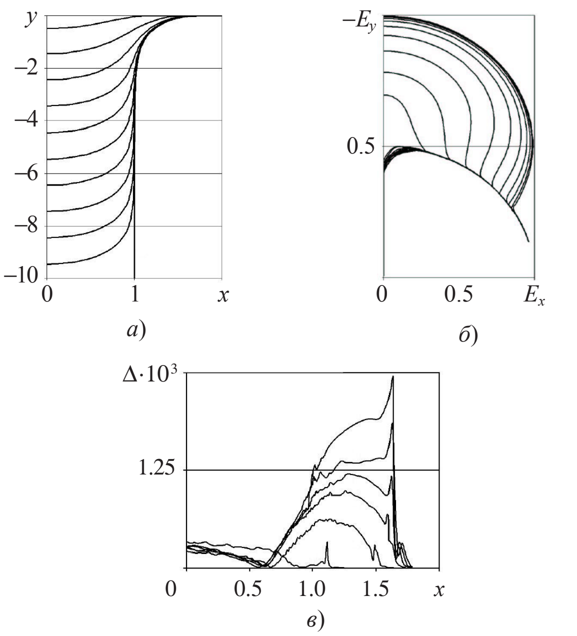

Рис. 2

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента «Ведущие научные школы РФ» (проект НШ-65497.2010.9).

Список литературы

1. Каримов А.Х., Клоков В.В., Филатов Е.И. Методы расчета электрохимического формообразования. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1990. 388 с.

2. Житников В.П., Зайцев А.Н. Импульсная электрохимическая размерная обработка. М.: Машиностроение, 2008. 413 с.

3. Житников В.П., Ошмарина Е.М., Федорова Г.И. Использование разрывных функций для моделирования растворения при стационарном электрохимическом формообразовании // Изв. вузов. Математика. 2010. №10. С. 77–81.

4. Житников В.П., Муксимова Р.Р., Ошмарина Е.М. Моделирование процессов нестационарного электрохимического формообразования применительно к прецизионным технологиям // Труды математич. центра им. Н.И. Лобачевского. 2010. Т. 42. С. 99–122.

HELE-SHAW PROBLEMS WITH RESTRICTIONS ON THE MOBILITY OF FREE BOUNDARIES

V.P. Zhitnikov, R.R. Muksimova, N.M. Sherykhalina

Plane problems of potential fluid flows with impenetrable or equipotential moving boundaries are under consideration. The velocity of free surface motion is proportional to potential gradient, if the modulus of the gradient is higher than some critical value, or otherwise equal to zero. this model can be used for the investigation of fluid flows with dissolved (eroding) boundaries, exploded ground motion, the processes of electrochemical machining.

Keywords: dissolved bounds, nonstationary shaping, analytical functions, Polubarinova– Galin equation with discontinuous right part, formation of stationary and quasi-stationary configurations.