УДК 532.5.013.4:537.2:537.63

# ВЛИЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТНОЕ НАТЯЖЕНИЕ И УСТОЙЧИВОСТЬ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗДЕЛА ПОЛЯРИЗУЮЩИХСЯ И НАМАГНИЧИВАЮЩИХСЯ ЖИДКОСТЕЙ



***А.В. Жуков***

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

az@imec.msu.ru

*Поступила в редакцию 16.05.2011*

С помощью градиентной модели структуры межфазной границы для однокомпонентных поляризующихся и намагничивающихся жидкостей найдена зависимость поверхностного натяжения от напряженности электромагнитного поля. Показано, что вид этой зависимости может существенно влиять на устойчивость свободной поверхности жидкости даже при умеренных полях, когда изменение поверхностного натяжения очень мало.

*Ключевые слова:* поляризующиеся жидкости, магнитные жидкости, устойчивость свободной поверхности, поверхностное натяжение, структура межфазной границы.

Экспериментально было обнаружено влияние магнитного поля на поверхностное натяжение магнитных жидкостей [1]. Термодинамическая устойчивость поверхности жидкости в магнитном поле изучалась в [2]. Зависимость поверхностного натяжения от напряженности электромагнитного поля исследовалась статистическими методами для поляризующихся [3] и намагничивающихся [4] однокомпонентных жидкостей. В настоящем исследовании используется градиентная модель плоской межфазной границы типа жидкость–пар при тепловом равновесии (см. [5]). Рассматривается в основном случай поляризующихся жидкостей; для намагничивающихся жидкостей получаются аналогичные результаты.

## Градиентная модель структуры межфазной границы

Простейшее обобщение градиентной модели на случай поляризующихся жидкостей во внешнем электрическом поле $\mathbf{E}$ можно получить, задав свободную энергию неоднородной жидкости $F_n$ в виде функции, зависящей от температуры $T$, плотности $\rho$ и градиентов плотности:

$$F_n = F(\rho, \mathbf{E}, T) + \frac{1}{2}(\alpha + \alpha_e E^2)(\nabla\rho)^2,$$
$$\alpha = \text{const} > 0, \quad \alpha_e = \text{const} > 0. \tag{1}$$

Условия равновесия для плоской межфазной границы, перпендикулярной оси $z$, [6]:

$$\rho_z \frac{\partial \dot{F}}{\partial \rho_z} - \dot{F}_n + \mu\rho = p = \text{const}, \ \mu = \text{const}, \ D_n = \text{const},$$
$$\mathbf{E}_t = \text{const}, \ \dot{F}_n\left(\rho, \frac{d\rho}{dz}, D_n, \mathbf{E}_t\right) \equiv F_n + \frac{1}{4\pi} E_n D_n. \tag{2}$$

Здесь $E_t$, $D_n$ – касательная составляющая электрического поля и нормальная компонента индукции. Значения $p$, $\mu$, а также плотности фаз $\rho_1 = \rho(-\infty)$, $\rho_2 = \rho(\infty)$ определяются из условий равновесия фаз

$$\mu = \frac{\partial \dot{F}(\rho_i)}{\partial \rho}, \quad p = \mu\rho_i - \dot{F}(\rho_i) \quad (i = 1, 2),$$
$$\dot{F}(\rho) \equiv \dot{F}_n(\rho, 0, D_n, \mathbf{E}_t). \tag{3}$$

Для однозначного определения профиля плотности к уравнениям (2), (3) необходимо добавить условие равенства поверхностной плотности нулю [5], выбрав в качестве эквимолярной поверхность $z = 0$. Поверхностная плотность свободной энергии $f(\mathbf{E}_t, [\varphi])$ вычисляется как

$$f = \dot{f} - \frac{1}{4\pi} D_n[\varphi], \quad [\varphi] = -4\pi \frac{\partial \dot{f}}{\partial D_n},$$
$$\dot{f} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} (\dot{F}_n - \mu\rho + p)\,dz, \tag{4}$$

где $[\varphi]$ – величина разрыва электрического потенциала на межфазной границе.

При малых полях и слабых дипольных взаимодействиях между молекулами свободная энергия и электрическая индукция для однородной жидкости имеют вид [6]:

$$F = F_0(\rho, T) - \frac{E^2}{8\pi}[1+\eta(T)\rho], \quad \mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E},$$

$$\varepsilon = 1 + \eta\rho, \quad \eta(T) \sim \frac{1}{T'},$$

где $F_0(\rho, T)$ – свободная энергия жидкости без учета электромагнитных взаимодействий, $\varepsilon$ – диэлектрическая проницаемость. Для поверхностной плотности свободной энергии в линейном приближении по $E_t^2, D_n^2$ получим

$$\dot{f} = \sigma(T) + \gamma_t(T)E_t^2 + \gamma_n(T)D_n^2,$$

$$f = \sigma + \gamma_t E_t^2 - \frac{[\varphi]^2}{64\pi^2\gamma_n}. \quad (5)$$

Аналогично для намагничивающихся однокомпонентных жидкостей получим

$$\dot{f} = \sigma + \gamma_t H_t^2 + \gamma_n B_n^2, \quad f(m_t, B_n) =$$
$$= \dot{f} + m_t H_t = \sigma + \gamma_n B_n^2 - m_t^2/4\gamma_t,$$

где $m_t$ – касательная компонента поверхностной намагниченности [2]. Коэффициенты $\gamma_t, \gamma_n$ имеют размерность длины. При этом $\sigma > 0$, $\gamma_t > 0$ всегда, а величина $\gamma_n < 0$ для уравнения состояния $F_0(\rho, T)$ в форме Пенга–Робинсона [7], наиболее распространенной при вычислениях поверхностного натяжения жидкостей методом Ван-дер-Ваальса. Эти знаки соответствуют статистически полученным результатам в [3, 4].

## Условие на границе раздела и устойчивость свободной поверхности

Рассмотрим изотермическое равновесие двух фаз жидкости-диэлектрика в областях $V_1$, $V_2$ с межфазной поверхностью $\Sigma$: $x_i = x_i(u_a)$ во внешнем гравитационном поле с ускорением свободного падения $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$. Объемная свободная энергия для фазы a имеет вид

$$F = F_a(\rho, \mathbf{E} = -\nabla\varphi) = F_{0a}(\rho) - \varepsilon_a \frac{E^2}{8\pi},$$

а поверхностная свободная энергия (5) – вид $f = f(a_{ab}, \langle\partial_a\varphi\rangle, [\varphi])$, где $a_{ab}$ – первая квадратичная форма поверхности, $a, b = 1, 2$, и используются обозначения $[\varphi] \equiv \varphi_2 - \varphi_1$, $\langle\varphi\rangle \equiv 1/2(\varphi_2 + \varphi_1)$ для функций, разрывных на поверхности $\Sigma$. Вариационное уравнение

$$\delta I[\rho,\varphi,\Sigma]=0, \; I \equiv \left(\int_{V_1} F_1 dV + \int_{V_2} F_2 dV + \int_{\Sigma} \rho g x_3 dV\right),$$

$$\int \rho dV = \text{const} \quad (6)$$

дает уравнения Эйлера – Лагранжа для двух фаз

$$\Delta\varphi=0, \; \partial_i p_j^i = -\rho g_j, \; p_j^i \equiv \left(F - \rho\frac{\partial F}{\partial\rho}\right)\delta_j^i + \frac{1}{4\pi}D^i E_j,$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}, \quad \varepsilon = \varepsilon_a, \quad x \in V_a \quad (a = 1, 2),$$

где $p_j^i$ – тензор напряжений, а также граничные условия на поверхности $\Sigma$:

$$\langle D_n\rangle = 4\pi\frac{\partial f}{\partial[\varphi]}, \quad [D_n] = 4\pi\nabla_a\left(\frac{\partial f}{\partial\langle E_a\rangle}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow D_{n1} - D_{n2} = 4\pi\gamma_t\Delta_{(2)}(\varphi_1 + \varphi_2),$$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 4\pi\gamma_n(D_{n1} + D_{n2}), \quad (7)$$

$$[p_{na}] \equiv [p_k^i n_i x_a^k] = -\nabla_b\sigma_a^b, \quad [p_{nn}] \equiv [p_{ik}n^i n^k] =$$

$$= -\sigma^{ab}b_{ab}, \quad \sigma^{ab} \equiv 2\frac{\partial f}{\partial a_{ab}} + f a^{ab}. \quad (8)$$

Здесь $b_{ab}$ – вторая квадратичная форма, $\sigma^{ab}$ – тензор поверхностных напряжений. Условия (7), (8) справедливы независимо от возможности фазовых превращений на границе. Если же на границе могут происходить фазовые превращения, то из (6) следует дополнительное условие

$$[\mu] \equiv \left[\frac{\partial F}{\partial\rho}\right] = 0.$$

Уравнения Лапласа для потенциала имеют нестандартные граничные условия (7), содержащие вторые производные искомых функций, что может привести к некорректности задачи. Естественно потребовать корректности постановки задачи в области $-L < x_3 < L$ с условиями Дирихле при $x_3 = \pm L$ и межфазной поверхностью $x_3 = 0$ в пределе $L \to \infty$. Тогда с помощью преобразования Фурье легко показать, что при $\gamma_\tau > 0$, $\gamma_n < 0$ условие корректности задачи имеет вид

$$\min(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2) < q < \max(\varepsilon_1^2, \varepsilon_2^2), \quad q \equiv -\gamma_t/\gamma_n. \quad (9)$$

Задача корректна также при $\gamma_\tau \leq 0$, $\gamma_n \geq 0$ и любых $q$ [2], однако этот случай не реализуется для однокомпонентных жидкостей ни в градиентной модели (1), ни в статистических моделях [3, 4].

Рассмотрим в рамках данной модели задачу об устойчивости состояния равновесия для плоской горизонтальной свободной поверхности несжимаемой жидкости во внешнем электрическом поле. В качестве критерия устойчивости используем неравенство

$$\delta^2 I_{eff}[\rho,\Sigma] > 0 \text{ при } \int\rho dV = \text{const},$$

$$I_{eff}[\rho,\Sigma] \equiv I[\rho,\varphi[\Sigma],\Sigma], \quad (10)$$

где $\varphi[\Sigma]$ – решение электростатической задачи при фиксированных условиях на $\partial V$. Приближение свободной поверхности формально соответствует $\rho_1 = 0$, $F_{01} = 0$, $\varepsilon_1 = 1$, а приближение несжимаемой жидкости – условию $\rho_2 = \rho = \text{const}$. Решение задачи легко найти с помощью преобразования Фурье. В частности, для нормального к поверхности электрического поля при $\gamma_\tau = \gamma_n = 0$ критерий устойчивости имеет обычный вид [6]

$$E^2 < E_0^2 \equiv \frac{8\pi\varepsilon(\varepsilon+1)}{(\varepsilon-1)^2}\sqrt{\sigma\rho g}, \quad \varepsilon \equiv \varepsilon_2.$$

При $\gamma_\tau \neq 0$, $\gamma_n \neq 0$ порог неустойчивости $E_*$ существенно зависит от отношения коэффициентов (9) и, вообще говоря, отличается от $E_0$ даже при $\gamma_\tau \to 0$, $\gamma_n \to 0$. В частности, при $q =$ $=$ const, $\gamma_n\sqrt{\rho g/\sigma} \to 0$ получим

$$(E_*/E_0)^2 \to z/(q+\varepsilon) < 1.$$

Аналогичный результат получается для намагничивающихся жидкостей с помощью замены $E \to H$, $\varepsilon \to \mu$.

Таким образом, зависимость поверхностного натяжения от напряженности электромагнитного поля может существенно влиять на устойчивость свободной поверхности жидкости даже при умеренных полях, когда изменение поверхностного натяжения за счет поля очень мало.

***Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты №10-01-00015,11-01-00051).***

*Список литературы*

1. Голубятников А.Н., Субханкулов Г.И. // Магнитная гидродинамика. 1986. №1. С. 73–78.
2. Голубятников А.Н. // Успехи механики. 2006. Т. 4, №3. С. 3–25.
3. Warshavsky V.B., Zeng X.C. // Phys. Rev. E. 2003. V. 68, №5. P. 051203-1-13.
4. Shilov V.P. // Journal of Magnetism and Magnetic Materials. 2006. V. 302, No 2. P. 495–502.
5. Роулинсон Дж., Уидом Б. Молекулярная теория капиллярности. М.: Мир, 1986. 376 с.
6. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 664 с.
7. Peng D.-Y., Robinson D.B. // Industrial and Engineering Chemistry: Fundamentals. 1976. V. 15, No 1. P. 59–64.

## INFLUENCE OF ELECTROMAGNETIC FIELD ON SURFACE TENSION AND INTERFACE STABILITY IN POLARIZABLE AND MAGNETIZABLE FLUIDS

***A.V. Zhukov***

Using a square-gradient model of the interface structure for one-component polarizable and magnetizable fluids, the dependence of surface tension on static electromagnetic field strength is found. It is shown that the form of this dependence may influence drastically on the stability of a free fluid surface even at moderate field values when the rate of change of surface tension is small.

*Keywords:* polarizable liquids, magnetic fluids, free-surface stability, surface tension, interface structure.