УДК 532.51

ВИБРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ОБЛАСТЯХ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

С.М. Зеньковская[1], *В.А. Новосядлый*[2], *О.А. Прозоров*[1]

[1]Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону
[2]НИИ «Спецвузавтоматика», Ростов-на-Дону

zenkov@math.sfedu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассмотрено влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции в неоднородной жидкости с недеформируемой в среднем свободной границей. Исследуется случай подогрева сверху, когда числа Рэлея отрицательны и велики по модулю. С применением метода погранслоя проведен асимптотический анализ колебательной неустойчивости. Это позволило исследовать влияние вибрации на возникновение внутренних и поверхностных волн и показать ее стабилизирующий эффект.

Ключевые слова: высокочастотная вибрация, вибрационная конвекция, конвекция Марангони, метод пограничного слой Вишика – Люстерника, метод осреднения.

Изучается конвекция в горизонтальном слое вязкой несжимаемой жидкости, ограниченном сверху свободной поверхностью, а снизу – твердой стенкой. Слой как целое совершает поступательные колебания вдоль вектора $\mathbf{s} = (\cos\varphi, 0, \sin\varphi)$ по закону $af(\omega t)/\omega$, где f – периодическая функция с нулевым средним, $\omega \to \infty$, $a = O(1)$. На свободной поверхности действует поверхностное натяжение с коэффициентом $\sigma = \sigma_0 - \sigma_T(T - T_0)$.

К обобщенным уравнениям Обербека – Буссинеска (О-Б) применяется метод осреднения: асимптотическое решение задачи разыскивается в виде суммы плавных и быстрых, имеющих нулевое среднее по $\tau = \omega t$, слагаемых. Случай, когда свободная граница деформируема в целом, был рассмотрен в [1].

Исследуется случай, когда свободная граница недеформируема в среднем, выводятся осредненные уравнения и в них производится переход к уравнениям О-Б. В результате приходим к задаче:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{v} = -\nabla q + \Delta\mathbf{v} - GrT\gamma + \mu(\mathbf{w},\nabla)\nabla\Phi,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{v},\nabla T) = \mathrm{Pr}^{-1}\Delta T, \tag{1}$$

$$\mathbf{w} + \nabla\Phi = -\gamma T, \quad \operatorname{div}\mathbf{w} = 0; \tag{2}$$

краевые условия

$$z = 0: \frac{\partial v_1}{\partial z} = \frac{Ma}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_2}{\partial z} = \frac{Ma}{\mathrm{Pr}}\frac{\partial T}{\partial y},$$
$$\Phi = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial z} - BiT = \delta_1, \quad v_3 = 0, \tag{3}$$
$$z = 1: \mathbf{v} = 0, \quad B_1\frac{\partial T}{\partial z} + B_0 T = \delta_2, \quad w_3 = 0.$$

В результате осреднения в уравнениях конвекции появилась виброгенная сила, пропорциональная параметру $\mu = ah^2\tilde{\varepsilon}^2\langle f'^2\rangle\sin^2\varphi/\nu^2$, где $\tilde{\varepsilon}$ – параметр Буссинеска. Далее находится равновесное решение $v_0 = 0$, $T_0 = z$, $w_0 = 0$, $\Phi_0 = -z^2/2$, $q_0 = -Grz^2/2 + \mathrm{const}$ и исследуется его устойчивость. Соответствующая спектральная задача изучается асимптотически и численно. В случае монотонной неустойчивости получено, что нейтральные кривые $Ma(\alpha)$ с ростом вибрационного параметра поднимаются вверх и теряют выпуклость. Построена длинноволновая асимптотика $Ma(\alpha)$, из которой видно влияние вибрации на монотонную неустойчивость. Колебательная неустойчивость подробно рассмотрена в случае нагрева сверху, когда число Рэлея, отрицательно и велико по абсолютной величине: $\mathrm{Ra} \to -\infty$. Вводя малый параметр по формуле $\varepsilon = \sqrt[4]{-\mathrm{Pr}/Ra}$, получаем систему дифференциальных уравнений с малым параметром при старших производных, что позволяет применить метод Вишика – Люстерника к задаче

$$\lambda Lu = \varepsilon^2 L^2 u - \alpha^2 T - \bar{r}^2\alpha^2(DF + T),$$
$$\lambda T = \varepsilon^2\,\mathrm{Pr}^{-1} LT - u, \quad LF = -DT, \tag{4}$$

$$z = 0: u = 0, \quad \varepsilon^2 D^2 u + \alpha^2\beta^{-1}T = 0,$$
$$DT - BiT = 0, \quad F = 0, \quad \beta = Ra/Ma, \tag{5}$$

$$z = 1: u = Du = 0, \quad B_1 DT + B_0 T = 0,$$
$$DF + T = 0, \quad L = D^2 - \alpha^2. \tag{6}$$

Параметр $\bar{r}^2 = \mathrm{Pr}\,\mu\varepsilon^4$, рассматривается случай $\bar{r}^2 = O(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Исследуется колебательная неустойчивость $\lambda = i\bar{\lambda}$. Случай $\bar{r}^2 = 0$ (отсутствие вибрации) был рассмотрен в [2].

Неизвестные функции и критические значения параметров задачи разыскиваем в виде рядов по степеням малого параметра: $\overline{\lambda} = \lambda_0 + \varepsilon\lambda_1 + \ldots$, $\beta = \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \ldots$

Из нулевого приближения получаем дисперсионное соотношение вида:

$$(\beta_0\lambda_0^2(\sqrt{\Pr} + 1) + \alpha^2)(x_1 p_2 \cosh p_2 \sinh p_1 - \\ - x_2 p_1 \cosh p_1 \sinh p_2) = 0, \qquad (7)$$

где

$$x_1 = \left(1 - \sqrt{1 - 4\lambda_0^2 \overline{r}^2}\right)\alpha^2 / 2\lambda_0^2,$$

$$x_2 = \left(1 + \sqrt{1 - 4\lambda_0^2 \overline{r}^2}\right)\alpha^2 / 2\lambda_0^2,$$

$$p_1 = \sqrt{\alpha^2 + x_1}, \quad p_2 = \sqrt{\alpha^2 + x_2}.$$

Уравнению (7) соответствуют две ветки значений λ_0, которые отвечают за возникновение поверхностных и внутренних волн. Далее из условия разрешимости краевой задачи для первого приближения находится β_0, при этом получаем, что $\lambda_1 = 0$. Полученные формулы совпадают с формулами [2] при $\overline{r} = 0$. Численно построены нейтральные кривые колебательной неустойчивости на плоскости (α, Ma), (α, λ). Получено, что они замкнуты, и критическое значение Ma растет по абсолютной величине с ростом вибрационного параметра μ, то есть вибрация препятствует возникновению конвекции и в случае колебательной неустойчивости. Произведено сравнение асимптотических и численных результатов, которое показывает хорошее совпадение.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 09-01-00658-а.

Список литературы

1. Зеньковская С.М., Шлейкель А.Л. Влияние высокочастотной вибрации на возникновение конвекции Марангони в горизонтальном слое жидкости // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. С. 573–583.

2. Rednikov A.Ye. et al. Rayleigh-Marangoni oscillatory instability in a horizontal liquid layer heated from above: coupling and mode mixing of internal and surface dilational waves // Journal of Fluid Mechanics. 2000. Vol. 405. P. 57–77.

VIBRATIONAL CONVECTION IN LAYERS WITH FREE BOUNDARY

S.M. Zenkovskaya, V.A. Novosiadliy, O.A. Prozorov

The research is focused on the influence of high-frequency vibration on the onset of convection in a layer with a non-deformable on average interface. The case of heating from the top was studied. The Rayleigh number is assumed to be negative and large. Vishik – Lusternik method was applied to the oscillatory stability problem. Vibration was shown to stabilize the onset of inner and surface waves.

Keywords: high-frequency vibration, vibrational convection, Marangoni convection, Vishik–Lusternik method, averaging method.