УДК 532.59+533.6+533.95

СТРУКТУРЫ РАЗРЫВОВ В СРЕДАХ СО СЛОЖНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

И.Б. Бахолдин

Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, Москва

bakh@orc.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуются численные решения обобщенного уравнения Кортевега – Бюргерса, описывающего волны при наличии ледового покрытия или поверхностного натяжения, являющегося также модельным уравнением для широкого класса моделей механики сплошной среды, в частности для модели электронной магнитной гидродинамики. Рассмотрены два случая. В первом случае касательная к дисперсионной ветви пересекает ее вне начала координат, во втором случае такого пересечения нет. Во втором случае тип структуры разрыва определяется в результате решения системы уравнений, описывающих дисперсионную ветвь, и уравнения прямой, соответствующей скорости разрыва. Если корни чисто мнимые, то возникает структура с внутренним бездиссипативным разрывом солитонного типа; если корни комплексные, то возникает структура с разрывом с излучением. Во втором случае такое исследование не дает полной информации. Применяется методика, основанная на анализе ветвей двоякопериодических решений обобщенного уравнения Кортевега – де Вриза. Установлено, что длинноволновая одноволновая ветвь состоит из фрагментов, переходящих в двухволновые резонансные ветви с целым отношением периодов волн. Для резонансных ветвей на определенных интервалах интенсивности разрыва можно найти бездиссипативные структуры, позволяющие переходить с резонансной ветви на коротковолновую ветвь. Поэтому, используя усредненные уравнения для волновых зон, можно построить решения для слабодиссипативных структур разрывов, содержащие внутренние бездиссипативные резонансные разрывы. Решение с разрывом с излучением можно интерпретировать как частный случай таких решений с 1/1 резонансом. Такие решения наблюдаются при непосредственном расчете обобщенного уравнения Кортевега – Бюргерса с применением метода установления, причем на интервалах существования резонансных бездиссипативных структур наблюдается именно тот разрыв, который предсказывается аналитически. Проведено исследование зависимости типа разрыва от его интенсивности и диссипативного параметра. Помимо стационарных структур, обнаружены периодические по времени и стохастические структуры. Для некоторых областей параметров наблюдается гистерезис: наличие двух стационарных решений при одних и тех же значениях параметров. Тип решения зависит от пути эволюции системы. Замечены бифуркации решений, характерные для общей теории динамических систем.

Ключевые слова: структуры разрывов, дисперсия, нелинейность.

Будем исследовать структуры разрывов, описываемые обобщенным уравнением Кортевега – Бюргерса

$$a_t + b_1 a_x + (a^2/2)_x + b_3 a_{xxx} + b_5 a_{xxxxx} = \varepsilon a_{xx}. \quad (1)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем обобщенное уравнение Кортевега – де Вриза, описывающее волны в жидкости при наличии ледового покрытия или поверхностного натяжения. При совпадении знаков b_3 и b_5 дисперсионная кривая этого уравнения имеет точку перегиба вне начала координат, поэтому прямая касательная в начале координат пересекает дисперсионную ветвь (случай 1). При несовпадении знаков такого пересечения нет (случай 2). В этом смысле уравнение (1) моделирует две типичные ситуации, встречающиеся в моделях механики сплошной среды с усложненной дисперсией, в частности это встречается в модели электронной магнитной гидродинамики.

Под структурой разрыва обычно понимается решение, описывающее переход между однородными состояниями. В бездиссипативном случае, как правило, область структуры расширяется со временем, в диссипативном типичны стационарные структуры. Кроме того, можно рассматривать и безиссипативные структуры в обобщенном смысле как переходы между однородными, периодическими, двоякопериодическими состояниями. Расширяющиеся автомодельным образом со временем бездиссипативные структуры и слабодиссипативные структуры можно описать с помощью усредненных уравненных уравнений для волновых зон. При таком описании безиссипативные структуры в обобщенном смысле соответствуют разрывам внутри обычных структур. Задачей настоящей работы является исследование типов этих внутренних структур в зависимости от амплитуды разрыва и параметра диссипации.

В случае 2 возможно два типа структур: солитонный тип и разрыв с излучением. В обоих случаях по одну сторону от разрыва прямая $U = \omega/k$, где U – скорость разрыва, и дисперсионная кривая $\omega = \omega(k)$ пересекаются при $k > 0$, а для другой стороны они не пересекаются. Для определения типа структуры следует решить систему уравнений $U = \omega/k$, $\omega = \omega(k)$ для той стороны, где пересечения нет. Если корни мнимые (амплитуда разрыва Δ невелика), то имеем солитонный тип разрыва, если комплексные, то разрыв с излучением.

В случае 1 для одной из сторон разрыва также имеется одно пересечение, а для другой – либо пересечений нет, тогда возможен разрыв с излучением и соответствующие корни комплексны, либо два пересечения, тогда соответствующие корни, возможен внутренний разрыв резонансного типа, т.е. переход между периодическим и двоякопериодическим решением. При этом отношение периодов по мере уменьшения амплитуды разрыва принимает целое значение 2, 3, 4, … Разрыв с излучением, наблюдаемый при больших амплитудах разрыва, формально интерпретируется как 1/1 резонанс.

Для детального анализа возможного типа разрыва в случае 1 можно применять методику, основанную на анализе ветвей двоякопериодических решений уравнений бегущих волн обобщенного уравнения Кортевега–де Вриза. В качестве параметров ветви принимаются величины $z = a(0)$ и $w = a_{xx}(0)$ при условиях $a_x(0) = 0$ и $a_{xxx}(0) = 0$. Типичное расположение ветвей в случае действительных корней показано на рис. 1*а*. Дробью указано отношение периодов волн в двухволновом решении, знаками плюс и минус обозначены синфазные и противофазные ветви. Имеются две одноволновые ветви: коротковолновая, обозначена на рис. 1*а* цифрой *1*, и длинноволновая – $A'OA$, CD, $D'C'$. Интересным фактом является то, что длинноволновой ветви соответсвуют двоякопериодические решения и что она состоит из фрагментов, заканчивающихся точками разворота, то есть точками перехода на резонансные двухволновые ветви с целым отношением периодов. Для этих двухволновых ветвей можно найти структуры разрывов, позволяющие переходить от двухволновой ветви к коротковолновой одноволновой. Такие структуры существуют для некоторых интервалов интенсивности разрыва. Это позволяет построить решения, огибающие которых показаны на рис. 1*б*, цифрами обозначено визуально наблюдаемое отношение периодов, буква S указывает, что волны симметричные.

В связи с тем, что используемая структура разрыва соответствует точке соединения длинноволновой одноволновой и двухволновой резонансной ветвей, это разрыв типа Жуге, т.е. одна из характеристик усредненной системы уравнений для волновой зоны совпадает с линией разрыва. Решение можно построить также и для бездиссипативного варианта уравнения, см. рис. 1*в*, но оно не наблюдается при расчетах.

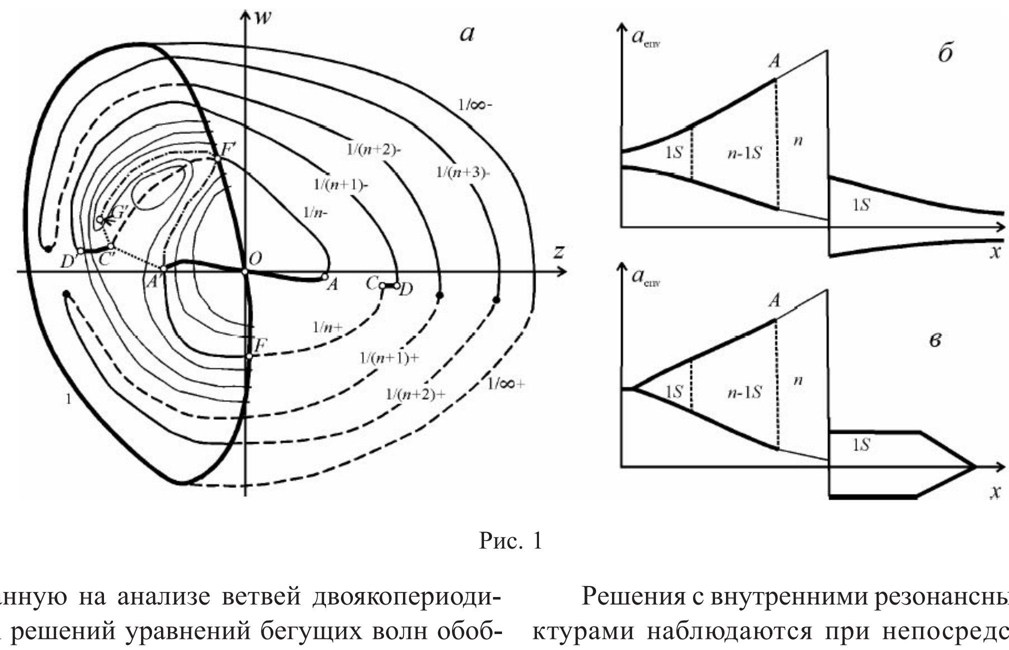

Рис. 1

Решения с внутренними резонансными структурами наблюдаются при непосредственных расчетах уравнения (1). При исследовании применялась методика анализа типа решения при эволюции параметра ε. При больших значениях ε установившееся решение – стационар-

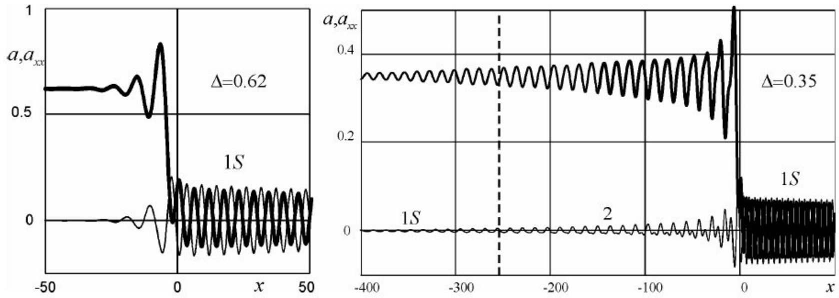

Рис. 2

ное и относится к одному из описанных выше типов. При уменьшении ε решение становится периодическим по времени, а затем стохастическим. Для некоторых переходных интервалов интенсивности разрыва стационарное решение с внутренним резонансом типа $1/n$ переходит не в периодическое решение, а в стационарное типа $1/(n + 1)$, которое можно наблюдать и при некотором увеличении ε, т.е. имеет место гистерезис. Рассмотренные выше решения, описываемые усредненными уравнениями, действительно наблюдаются при непосредственном расчете в тех интервалах интенсивности разрыва, где они существуют.

На рис. 2 при $\Delta = 0.62$ показано решение с 1/1 резонансом, а при $\Delta = 0.35$ – решение с резонансом 1/2.

Данные результаты более подробно изложены в [1, 2].

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №08-01-00618-а и президентской программы поддержки ведущих научных школ (НШ-4810.2010.1).

Список литературы

1. Бахолдин И.Б. Бездиссипативные разрывы в механике сплошной среды. М.: Физматлит, 2004.
2. Бахолдин И.Б. Стационарные и нестационарные структуры разрывов для моделей, описываемых обобщенным уравнением Кортевега – Бюргерса // ПММ. 2011. Вып. 2.

SHOCK STRUCTURES IN MEDIA WITH COMPLEX DISPERSION

I.B. Bakholdin

We study the numerical solutions of the generalized Korteweg – Burgers equation, which describes the waves in the presence of ice cover or surface tension, which is also a model equation for a broad class of models of continuum mechanics, in particular for the model of the electron magnetohydrodynamics. There are two cases. In the first case, the tangent to the dispersion branch cuts it away from the origin, in the second case there is no such an intersection. In the second case, the type structure of the discontinuity is determined by solving the system of equations describing the dispersion branch, and the equation describing the line corresponding to the velocity discontinuity. If the roots are purely imaginary, there is a structure with an internal non-dissipative shock of solitary-wave type, if the roots are complex, there is the structure with a discontinuity with the radiation. In the second case, this study does not provide complete information. A technique based on an analysis of the branches of doubly periodic solutions of the generalized Korteweg – de Vries equation was developed. It was established that the one-wave long-wave branch contains fragments that transit to the two-wave resonant branch with integer ratio of wave periods. For the resonance branches at certain intervals of the intensity of the shock can be found non-dissipative structures that permit us to pass from the resonant branch to the short-wave one-wave branch. Therefore, using the averaged equation for the wave zone, we can construct solutions for weakly dissipative shock structures containing internal non-dissipative resonant discontinuities. Solution with a shock with the radiation can be interpreted as a special case of such solutions with 1/1 resonance. The considered solutions are observed by the direct calculation of the generalized KdV – Burgers equation using the method of stabilization, and intervals of existence of different internal resonant structures observed in numerical experiment exactly correspond to that is predicted analytically. The study of dependencies of the type of discontinuity from its intensity and the dissipative parameter is fulfilled. Besides stationary structures time-periodic and stochastic structure were found also. For some areas of parameters hysteresis was observed: the presence of two stationary solutions for the same parameters. Type of solution depends on the path of evolution of the system. Observed bifurcation of solutions is typical for the general theory of dynamical systems.

Keywords: shock structures, dispersion, nonlinearity.