УДК 532.6

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ В НЕМАТИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ

А.Г. Калугин

Московский госуниверситет им. М.В. Ломоносова

kalugin@mech.math.msu.su

Поступила в редакцию 16.05.2011

Рассматривается задача о распространении гармонических волн малой амплитуды на поверхности нематического жидкого кристалла. Анизотропная жидкокристаллическая фаза задается моделью Франка – Озеена, поверхностная энергия – соотношением Рапини – Популара. Рассматриваются три случая изотропной фазы: идеальная невесомая неинерционная среда, а также вязкая и идеальная тяжелые несжимаемые жидкости. В каждом случае получено аналитическое решение задачи, выведено дисперсионное соотношение, при помощи параметрического подхода построены графики зависимости круговой частоты и коэффициента затухания от волнового вектора, изучено влияние внешней среды на решение. Также исследована устойчивость таких волн.

Ключевые слова: нематические жидкие кристаллы, поверхностные волны, устойчивость.

В модели нематических жидких кристаллов анизотропия жидкости описывается единичным вектором $\mathbf{n}$ осредненной ориентации длинных осей молекул частицы среды или, возможно, более сложных структурных образований, называемым директором. Наличие дополнительного параметра, задающего состояние среды, в случае модели Франка – Озеена дает добавочное слагаемое в выражении для свободной энергии, имеющее вид:

$$F_V = \frac{1}{2} K \nabla_i n^j \nabla^i n_j + \frac{1}{2} K_0 (\nabla_i n_j \cdot \nabla^j n^i - (\nabla_k n^k)^2),$$

где K и K_0 – постоянные Франка, причем второе слагаемое имеет дивергентную форму и не влияет на ориентацию директора внутри объема, однако его необходимо учитывать при выводе граничных условий. Поверхностная энергия в случае слабого сцепления директора с поверхностью задается соотношением Рапини – Популара:

$$F_S = \alpha + \frac{\beta}{2}(1 - (\sin\Omega\sqrt{1-n_\nu^2} + \cos\Omega\,|\,n_\nu\,|)^2),$$

где Ω – заданный угол между осью легкого ориентирования директора на поверхности и единичной нормалью ν к ней; α, β – постоянные коэффициенты. В случае модели Франка – Озеена тензор напряжений принимает вид $p^{ij} = 2\mu e^{ij} - p\delta^{ij} - K\nabla^i n^k \nabla^j n_k$, где e^{ij} – компоненты тензора скоростей деформации, μ – постоянный коэффициент вязкости, p – давление, среда при этом предполагается несжимаемой. Поле директора находится из уравнения

$$(\delta^{jk} - n^j n^k)\nabla_i \frac{\partial F_V}{\partial \nabla_i n^j} = 0.$$

В невозмущенном состоянии покоящийся нематик занимает полупространство $z < 0$, где ось z противонаправлена силе тяжести, начальная ориентация директора имеет вид $(\sin\Omega\cos\varphi_0,$ $\sin\Omega\sin\varphi_0,\ \cos\Omega)$. В линеаризованной системе уравнений для модели Франка – Озеена уравнения движения отделяются от уравнений для вектора ориентации и совпадают с уравнениями для вязкой изотропной жидкости. При этом уравнения для скорости и директора решаются независимо, а анизотропные свойства среды проявляются в граничных условиях, в частности при определении скачка нормальной к поверхности раздела сред компоненты вектора напряжений [1, 2]:

$$[p_{\nu\nu}] = b^{\alpha\beta}\left(F_S - n_\nu \frac{dF_S}{dn_\nu}\right) - $$
$$- n^\alpha \nabla_\alpha \left(\frac{dF_S}{dn_\nu}\right) - \frac{dF_S}{dn_\nu}\nabla_i n^i,$$

где $b^{\alpha\beta}$ – компоненты второй квадратичной формы поверхности, суммирование по греческим индексам означает свертку по касательным к поверхности составляющим вектора и ковариантное дифференцирование по поверхностной метрике, суммирование по латинским индексам – по пространственным компонентам.

Решение линеаризованной задачи для плоских гармонических волн ищется в общем виде $\mathrm{Re}(f(z)\exp(i\omega t - ikx))$, где ω – комплексная частота, k – действительное волновое число. Условие существования нетривиального решения позволяет выписать дисперсионное соотношение:

а) в случае идеальной внешней среды

$$(\rho^2+\rho_1^2)\omega^2+kg\rho(\rho_1-\rho)-$$
$$-4\mu k^2\big(i\omega\rho+(k-l)\mu k\big)=\tilde{\alpha}\rho k^3,$$

где ρ_1 – плотность внешней среды,

$$l=k\sqrt{1+\frac{i\omega\rho}{\mu k^2}},\quad \mathrm{Re}\,l\ge 0$$

$$\tilde{\alpha}=\alpha+\frac{\beta kK\cos^2\varphi_0}{kK+\beta/(1-(\gamma\sin\Omega\sin\varphi_0)^2)},\quad \gamma=\frac{K_0}{K},$$

γ – гравитационная постоянная, в случае невесомой неинерционной внешней среды при другом наборе решений и граничных условий для получения дисперсионного соотношения достаточно положить $\rho_1 = 0$ [1, 2];

б) в случае тяжелой вязкой внешней среды, когда плотности и динамические коэффициенты вязкости обоих фаз совпадают [3]

$$2ik^2\mu\omega\sqrt{1+\frac{i\omega\rho}{\mu k^2}}\left(1+\sqrt{1+\frac{i\omega\rho}{\mu k^2}}\right)+\tilde{\alpha}k^3=0.$$

Для аналитического и численного исследования дисперсионных соотношений применимо параметрическое представление, когда $\omega = a + ib$, $l = c + id$, где a, b, c и d – действительные числа, $c > 0$. Подставив эти представления в дисперсионные соотношения и в выражение для l^2 и приравняв действительные и мнимые части, можно получить алгебраическую систему, решения которой задают a, b и k как рациональные функции c. При этом существуют два вида решения: периодическое с $a \ne 0$ – затухающие волны, бегущие вправо и влево, и монотонно затухающее с $a = 0$ и двумя значениями коэффициента затухания, однако последнее решение реализуется при $k > k_{\text{крит}}$, причем критическая длина волны сравнима с размерами структурных единиц, составляющих жидкий кристалл. Полученное параметрическое решение позволяет строить графики зависимости $a = a(k)$ и $b = b(k)$ численно. Дисперсионное соотношение также позволяет оценить влияние дивергентного слагаемого в энергии Франка на устойчивость волн. При $|\gamma| > 1/(\sin\Omega)$ существует интервал значений k и углов начальной ориентации директора, для которых мнимая часть ω становится отрицательной. Например, взяв в качестве констант Франка и коэффициента вязкости параметры типичного жидкого кристалла МББА при $\varphi_0 = \pi/2$, $\cos\Omega = 0.3$, $\gamma = 1.5$, численно можно получить, что $\mathrm{Im}\,\omega < 0$ в интервале значений $\Delta k \approx 0.0002$ см$^{-1}$ при $k < 0.005$ см$^{-1}$. Таким образом, при больших значениях дивергентного коэффициента в энергии Франка поверхностные волны могут быть неустойчивы в некоторой области начальных параметров.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 11-01-00188.

Список литературы

1. Голубятников А.Н., Калугин А.Г. // Вестник МГУ. Серия 1. Математика. Механика. 2001. №1. С. 42–43.
2. Golubiatnikov A.N., Kalugin A.G. // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2001. V. 366. P. 2731–2736.
3. Kalugin A.G., Igosheva M.A. // Molecular Crystals and Liquid Crystals. 2010. V. 526. P. 10–17.

SURFACE WAVES IN NEMATIC LIQUID CRYSTALS

A.G. Kalugin

The problem of harmonic wave propagation with small amplitude in nematic liquid crystals is considered. The Frank–Oseen approximation for a nematic phase and Rapini–Papoular model for surface tension are studied. Three cases of isotropic phase are considered: an ideal medium with zero density, viscous and ideal incompressible media under gravity forces. For these cases solutions of the problem of surface gravitational waves are obtained. The dispersion relations are deduced and studied using parametric representation. The diagrams for real and imaginary part of the frequency as a function of wave number are drawn. Also the problem of stability of waves is analyzed.

Keywords: nematic liquid crystal, surface wave, stability.