

УДК 532.5

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ЯВЛЕНИЯ «МЕРТВОЙ ВОДЫ»  
ПРИ ДВИЖЕНИИ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ В КАНАЛЕ**

© 2011 г.

**К.В. Кириллин<sup>1</sup>, С.И. Филиппов<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Казанский государственный архитектурно-строительный университет<sup>2</sup>Казанский (Приволжский) федеральный университет

kirill\_k@inbox.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Исследуется обтекание крылового профиля двухслойным потоком несжимаемой жидкости при наличии свободной поверхности и горизонтального дна. Для решения задачи применен аналитико-численный метод, позволяющий точно удовлетворить граничному условию на контуре. Выявлены гидродинамические эффекты, связанные с физическим явлением «мертвой воды».

*Ключевые слова:* крыловой профиль, двухслойная жидкость, гравитационные волны, ограниченный поток, открытый канал, моделирование границ особенностями, явление «мертвой воды».

Рассматривается поток идеальной несжимаемой жидкости, ограниченный сверху свободной поверхностью  $M_1$ , а снизу твердым дном  $M_3$ . Поток состоит из верхнего слоя толщины  $H_1$  плотности  $\rho_1$  и нижнего слоя толщины  $H_2$  плотности  $\rho_2$ . Жидкость находится под действием силы тяжести, ускорение которой равняется  $g$ . Крыловой профиль  $C$  с длиной хорды  $L$  расположен в верхнем слое жидкости.

В системе координат, начало которой совпадает с серединой хорды профиля, ось  $Ox$  параллельна невозмущенной границе раздела сред  $M_2$  и направлена навстречу потоку, а ось  $Oy$  направлена вертикально вверх, течение плоскопараллельное, установившееся. Скорости потока на бесконечности перед профилем параллельны невозмущенным границам  $y=h_k$  ( $k=1,3$ ) и равны  $U_l$  ( $l=1,2$ ). Считаем, что внутри жидкости вихри отсутствуют, так что течение обладает потенциалом скорости.

Введем соответствующие слоям жидкости области  $D_l$  ( $l=1,2$ ). Область  $D_1$  представляет собой полосу за исключением области, ограниченной профилем  $C$ . Рассмотрим комплексную переменную  $z=x+iy$  и комплексные потенциалы возмущенного течения  $\tilde{W}_l(z)=\tilde{\varphi}_l(x,y)+i\tilde{\psi}_l(x,y)$  в соответствующих областях  $D_l$ . Используя предположения линейной теории волн малой амплитуды, с учетом обозначений  $\tilde{W}_l(z)=U_l W_l(z)$ ,  $v_1=g/U_1^2$ ,  $v_2=g(\rho_1-\rho_2)/(\rho_1 U_1^2+\rho_2 U_1^2)$ , придем к следующей задаче: найти функции  $W_l(z)$ , аналитические в соответствующих областях и удовлетворяющие условиям:

$$\operatorname{Im} W_1(z) = y + \psi_C \quad (\psi_C = \text{const}), \quad z \in C; \quad (1)$$

$$\operatorname{Re}[W_1(z) dz + iv_1 W_1(z)] = 0, \quad y = h_1; \quad (2)$$

$$y = h_2; \quad \operatorname{Im}[W_1(z) - W_2(z)] = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{Re}[m_1 W_1(z)/dz - m_2 W_2(z)/dz + iv_2 W_2(z)] = 0,$$

$$\operatorname{Im}[W_2(z)/dz] = 0, \quad y = h_3; \quad (4)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} dW_l(z)/dz = 0, \quad |dW_l(z)/dz| < A, \quad A < \infty, \quad z \rightarrow \infty.$$

Представим  $W_l(z)$  ( $l=1,2$ ) в виде суммы  $W_l(z) = W_{1l}(z) + \gamma W_{2l}(z)$ , где  $W_{1l}(z)$ ,  $W_{2l}(z)$  – комплексные потенциалы возмущенного бесциркуляционного и чисто циркуляционного течений,  $\gamma$  – значение циркуляции. Метод решения задачи заключается в распределении двойных слоев особенностей вещественной плотности по невозмущенным уровням свободной поверхности  $M_1$  и границы раздела жидкостей  $M_2$  и дну канала  $M_3$ , к потенциалам которых добавляются такие регулярные вне  $C$  функции, что условие на контуре (1) выполняется точно [1]. Наряду с физической плоскостью  $z = x + iy$  рассмотрим параметрическую плоскость  $\zeta = \xi + i\eta$ . Пусть функция  $z = f(\zeta)$  осуществляет конформное отображение внешности единичной окружности на внешность профиля  $C$ . Будем искать комплексные потенциалы в виде

$$W_{sl}(z) = W_{s\infty}(z) + \sum_{k=1}^3 [V_{sk}(z) + \Phi_{sk}(z)],$$

$$V_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k} \frac{\mu_{sk}(t)}{z-t} dt,$$

$$\Phi_{sk}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty+ih_k}^{+\infty+ih_k} F_k(z,t) \mu_{sk}(t) dt,$$

$W_{s\infty}$  – комплексные потенциалы возмущенного течения при обтекании профиля безграничным потоком. Функции  $W_s(z, t)$  строятся в параметрической плоскости  $\zeta$ .

Из условий на границах раздела (2)–(4) получены системы интегро-дифференциальных сингулярных уравнений, которые сведены к системам линейных интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно плотностей распределенных особенностей  $\mu_{sk}(\zeta)$ . Для решения полученных систем применялся метод последовательных приближений. Некоторые результаты расчетов, выполненных для профиля НАСА 66mod в случае одинаковых скоростей слоев  $U = U_1 = U_2$  и отношения плотностей  $\rho_1/\rho_2 = 0.97$  представлены на рис. 1–4.

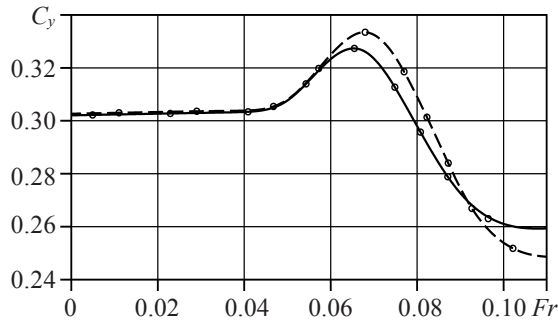


Рис. 1

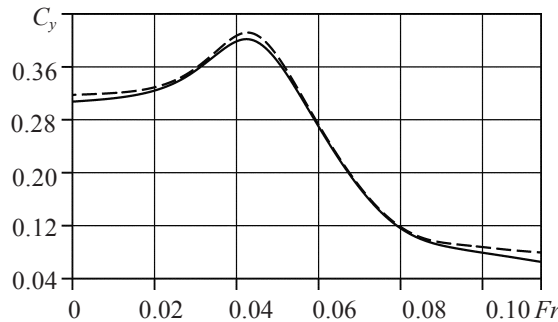


Рис. 2

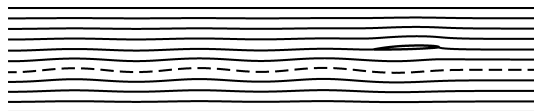


Рис. 3

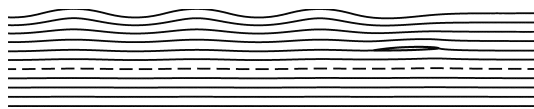


Рис. 4

В задачах о течении двухслойной жидкости со свободной поверхностью на границах раздела существует два типа волн. Волны первого типа при малой разнице плотностей жидкостей получают значительное развитие на границе раздела жидкостей и появляются только при числах Фруда  $Fr = Fr_1^*$ , где  $Fr = U/\sqrt{gL}$ , а  $Fr_1^* = Fr_1^*(\rho_1/\rho_2, H_1/L, H_2/L)$  – критическое значение числа Фруда. Волны второго типа, как и для неограниченного снизу потока, дают значительные амплитуды на свободной поверхности. Однако для канала они имеют место только при числах Фруда, меньших второго критического значения  $Fr_2^* = Fr_2^*(\rho_1/\rho_2, H_1/L, H_2/L)$ . При малой разнице плотностей жидкостей  $Fr_2^*$  близко к известному результату для однородного потока  $Fr = \sqrt{H/L}$ , где  $H = H_1 = H_2$ . На рис. 1, 2 представлены зависимости коэффициента подъемной силы  $c_y$  от числа Фруда при  $\alpha = 1^\circ$ ,  $h_1/L = 0.6$ ,  $h_2/L = -0.5$ . Сплошной кривой  $c_y$  изображен в случае нижнего слоя жидкости конечной толщины при  $h_3/L = -1.1$ , а штриховой – в случае полубезграничного нижнего слоя при  $h_3/L = \infty$ . Маркерами на рис. 1 отмечены результаты расчетов обтекания профиля двухслойной жидкостью в ограниченном твердыми крышкой и дном канале [2]. Как видно из рис. 1, при  $Fr < Fr_1^*$ , когда наиболее интенсивно генерируется внутренняя волна, твердая стенка хорошо моделирует свободную поверхность. На рис. 3, 4 продемонстрированы примеры расчета линий тока течения и границ раздела жидкостей при  $\alpha = 2^\circ$ ,  $h_1/L = 0.58$ ,  $h_2/L = -0.32$ ,  $h_3/L = -0.92$ ,  $Fr = \{0.066, 0.55\}$ . На рис. 3 при  $Fr < Fr_1^*$  отчетливо видна волна на границе раздела сред, свободная поверхность при этом остается фактически невозмущенной – явление «мертвой воды». На рис. 4 при  $Fr_1^* < Fr < Fr_2^*$  наблюдается волна на свободной поверхности и ее отсутствие на границе раздела жидкостей.

Аналогичным образом исследовано и обтекание профиля, расположенного в нижнем слое.

Список литературы

1. Филиппов С.И. Гидродинамика крылового профиля вблизи границ раздела. Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2004. 200 с.
2. Кириллин К.В., Филиппов С.И. Обтекание крылового профиля над границей раздела двух весо- мых жидкостей конечной глубины // Известия Казанского госуд. архитектурно-строительного ун-та. 2009. №1. с. 326–331.

**SIMULATION OF THE DEAD WATER PHENOMENON IN THE HYDROFOIL MOTION IN A CHANNEL***K.V. Kirillin, S.I. Filippov*

We examine a flow around a hydrofoil in a two-layer ponderable fluid with a free surface and a horizontal bottom. The problem is solved via the simulation of boundaries by singularities. Due to this method, the boundary condition specified on the contour is satisfied analytically exactly. Hydrodynamic effects associated with the dead water phenomenon are detected.

*Keywords:* hydrofoil, wing contour, wing section, two-layer fluid, gravity waves, bounded flow, open channel, simulation of boundaries by singularities, dead water phenomenon.