УДК 532.5:533.6.011.5

К ТЕОРИИ АВТОМОДЕЛЬНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ОДНОМЕРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В.С. Кожанов, И.А. Чернов

Саратовский госуниверситет им. Н.Г. Чернышевского

chernov-ia@yandex.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

Изучается случай движения сильной ударной волны (УВ) по покоящемуся газу переменной плотности, в котором энтропия позади УВ постоянна. Такой подход использовал К. Хантер в задаче о схлопывании каверны. Эти течения описываются двумя, а не тремя уравнениями с частными производными вместе с уравнением состояния газа, что упрощает модель. В плоском случае найдено счетное множество алгебраических решений. Дано сравнение течений в случае постоянной плотности и – по модели Хантера – для двух задач: о сильном взрыве, о схождении УВ к центру.

Ключевые слова: одномерные нестационарные течения, автомодельные течения, гомэнтропические течения, точное решение, точечный взрыв, сходящаяся ударная волна.

Основные соотношения и условие гомэнтропии

Теория автомодельных течений для различных областей механики наиболее полно представлена в [1]. Основные уравнения в гомэнтропической модели таковы [2]:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\gamma-1}\frac{\partial c^2}{\partial r}=0,$$
$$\frac{\partial c^2}{\partial t}+u\frac{\partial c^2}{\partial r}+(\gamma-1)\,c^2\left[\frac{\partial u}{\partial r}+(\nu-1)\,\frac{u}{r}\right]=0, \tag{1}$$

где t – время, r – координата, $u = u(r, t)$ – скорость частицы жидкости, $c^2 = c^2(r, t)$ – квадрат скорости звука, γ – показатель адиабаты, ν – тип симметрии течения.

Условие постоянства энтропии запишем в виде (s_0 = const)

$$s_0 = p\rho^{-\gamma} = \gamma^{-1}c^2\rho^{1-\gamma}. \tag{2}$$

Автомодельные решения имеют вид (α – показатель автомодельности):

$$r=\xi C t^{\alpha},\quad u=\alpha C\,t^{\alpha-1}\xi V(\xi),$$
$$c^2=\alpha^2C^2t^{2\alpha-2}\xi^2 Z(\xi). \tag{3}$$

Здесь ξ – независимая автомодельная переменная, а $\xi V(\xi)$ и $\xi^2 Z(\xi)$ – автомодельные представители скорости частицы жидкости u и квадрата скорости звука c^2 соответственно.

После подстановки (3) в (1) получим два обыкновенных дифференциальных уравнения, которые приводят к уравнению на фазовой плоскости (V, Z) и квадратуре для определения $\xi(V)$ [2, 3]:

$$\frac{dZ(V)}{dV}=$$
$$=\frac{(\gamma-1)\,Z(V)[2\alpha\Delta_0+\Delta_5]}{[(\gamma-1)\nu\alpha V-2(1-\alpha)]\,\Delta_0+(1-V)\Delta_5}, \tag{4}$$
$$\Delta_0=(1-V)^2-Z(V),\quad \Delta_5=(\gamma-1)(\nu-1)\alpha V^2-$$
$$-[(\gamma-1)(\nu\alpha-1)+2(1-\alpha)]V+2(1-\alpha).$$

При ν = 1 нелинейное уравнение (4) имеет общее решение, которое выражается через гипергеометрическую функцию Гаусса. Это позволяет построить полную классификацию всех ее алгебраических решений. Приведены примеры новых решений для (4).

Для плотности, давления и энтропийной функции имеем:

$$\rho=\rho_0 t^{w}R(\xi),\quad p=\rho_0\alpha^2C^2\,t^{2\alpha-2+w}H(\xi),$$
$$s=\rho_0^{1-\gamma}\alpha^2C^2t^{2\alpha-2+w(1-\gamma)}S(\xi),$$

где $R(\xi)$, $H(\xi) = \gamma^{-1}\eta^2Z(\xi)R(\xi)$ и $S(\xi) = \gamma^{-1}\eta^2Z(\xi)R^{1-\gamma}(\xi)$ – соответствующие автомодельные представители.

Вдоль траектории частицы при адиабатическом движении газа $p\rho^{-\gamma}$ имеет постоянное значение. Для гомэнтропических течений эта постоянная одна для всех траекторий. Для обеспечения условия (2) необходимо, чтобы функция s в своем автомодельном представлении не зависела явно от времени t, что накладывает на показатель w следующее условие – *условие* *гомэнтропии*:

$$w = 2(\alpha - 1)/(\gamma - 1). \tag{5}$$

Тогда получим

$$\rho = \rho_0 t^w [\gamma^{-1}\xi^2 Z(\xi)]^{\beta}, \quad p = p_0 t^{w\gamma}[\gamma^{-1}\xi^2 Z(\xi)]^{\beta\gamma},$$
$$\beta = 1/(\gamma - 1).$$

Сравнение газодинамических течений по двум моделям

Проведено сравнение некоторых течений по гомэнтропической модели (w из (5)) и по классической модели, когда УВ движется по газу с постоянной плотностью (w = 0). Рассмотрены две задачи:

1. Сильный взрыв. Решение для уравнения (4) имеет в переменных (V, Z) тот же вид, что и в [1], но ξ – другое [4]:

$$Z(V) = -\frac{(\gamma-1)\gamma(V-1)V^2}{2(\gamma V-1)}, \quad \xi(V) =$$
$$= C_1[((\gamma-1)\nu+2)\gamma V - ((\gamma-1)\nu+2\gamma)]^{n_1}\sqrt{\gamma V-1}\cdot V^{-\alpha},$$
$$\alpha = \frac{2\gamma}{(\gamma-1)\nu+2\gamma},$$
$$n_1 = -\frac{[(\gamma-1)\nu+2]^2+4(\gamma^2-1)}{2((\gamma-1)\nu+2\gamma)((\gamma-1)\nu+2)}.$$

На рис. 1 дано сравнение автомодельных представителей: *а*) скорости частиц, *б*) плотности, *в*) давления, *г*) температуры для движения УВ по газу постоянной плотности (кривые *1*), по гом энтропической модели (кривые *2*) для $\nu = 3$ и $\gamma = 7/5$.

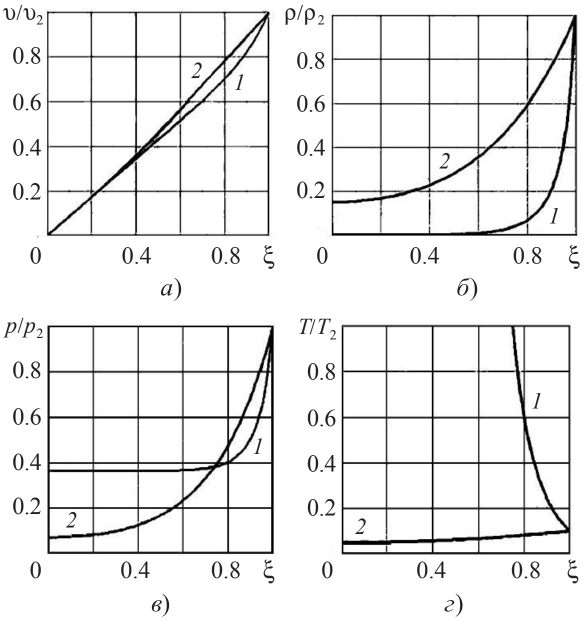

Рис. 1

2. Схождение УВ к центру и последующее отражение. Различия результатов по двум моделям [5] отражены в распределении автомодельных представителей (рис. 2): *а*) скорости частиц, *б*) плотности, *в*) квадрата скорости звука, *г*) энтропийной функции. Кривые приведены для $\nu = 3$ и $\gamma = 7/5$. Здесь $t = K^{-1/\alpha}\eta r^{1/\alpha}$, $u = \alpha K^{1/\alpha} r^{1-1/\alpha} U_1(\eta)$, $\rho = \rho_0 r^{w/\alpha} R_1(\eta)$, $c^2 = \alpha^2 K^{2/\alpha} r^{2-2/\alpha} G_1(\eta)$.

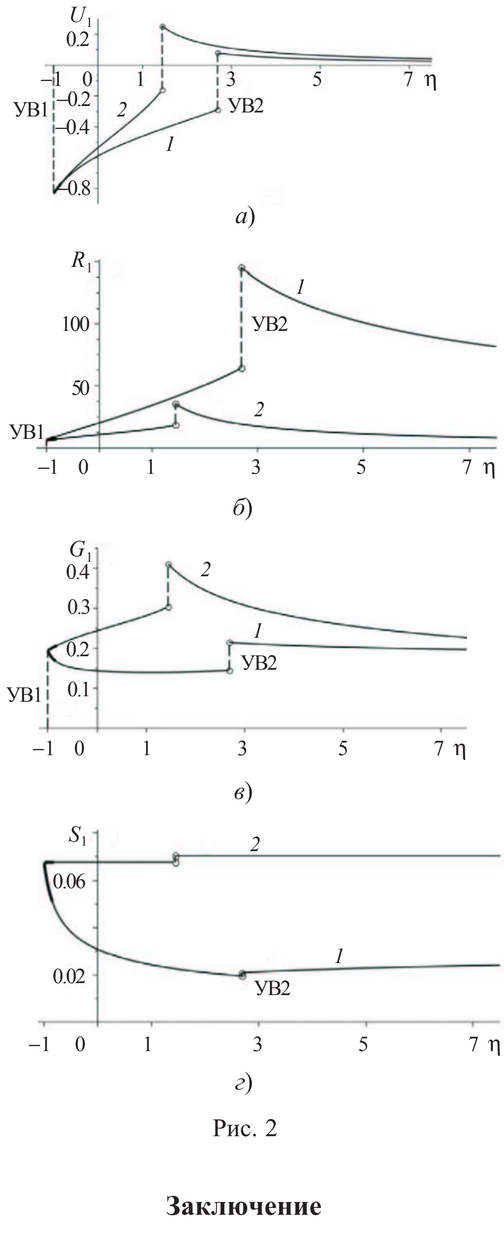

Рис. 2

Заключение

Сделана попытка трактовки автомодельных решений гомэнтропической модели как промежуточных асимптотик для средних по величине времен при движении УВ по области покоя с постоянной плотностью.

Список литературы

1. Седов Л.И. Методы подобия и размерностей в механике. М.: Наука, 1967. 428 с.

2. Хантер К. О захлопывании пустой полости в воде // Механика: Период. сб. пер. иностр. ст. 1961. №3 (67). С. 77–100.

3. Кожанов В.С. Расчет отраженных ударных волн в задаче о схлопывании пустой полости // Изв. Сарат. гос. ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика. 2010. Т. 10, вып. 1. С. 44–54.

4. Чернов И.А. Трактовка решения Седова как серии промежуточных асимптотик в течении от сильного взрыва // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2010. Т. 18, №4. С. 33–43.

5. Чернов И.А. Гомэнтропическая модель отражения сильной ударной волны от центра схождения // Изв. Сарат. гос. ун-та. Новая серия. Математика. Механика. Информатика, 2010. Т. 10, вып. 3. С. 70–76.

ON THE THEORY OF SELF-SIMILAR UNSTEADY ONE-DIMENSIONAL FLOWS OF IDEAL GAS

V.S. Kozhanov, I.A. Chernov

The propagation of a shock wave in a quiescent gas with variable density is investigated. The entropy behind the shock wave is constant. This approach is used by Hunter in the problem of a collapse of an empty cavity. These flows are described by two rather than three partial differential equations with the equation of state of a gas which simplifies the model. In the plane case the enumerable set of algebraic solutions is obtained. Comparison of solutions in the case of constant density and according to Hunter's model for the two problems (about the blast wave and about the converging shock wave) is presented.

Keywords: one-dimensional unsteady flows, self-similar flows, homentropic flows, exact solution, blast wave, converging shock wave.