УДК 532.5.013.4:537.2

РЭЛЕЙ-ТЕЙЛОРОВСКАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ПЛЕНКИ ЖИДКОГО ДИЭЛЕКТРИКА В ТАНГЕНЦИАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В.М. Коровин

НИИ механики Московского госуниверситета им. М.В. Ломоносова

korovin@imec.msu.ru

Поступила в редакцию 16.05.2011

В длинноволновом приближении изучено развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости пленки поляризованной диэлектрической жидкости, покрывающей нижнюю поверхность горизонтальной диэлектрической пластины. Установлено, что тангенциальное электрическое поле вызывает формирование периодической жидкой структуры, состоящей из параллельных валов.

Ключевые слова: пленка, жидкий диэлектрик, электрическое поле, гидродинамическая неустойчивость.

При наличии поверхностей раздела однородных несжимаемых диэлектрических жидкостей с различными диэлектрическими проницаемостями в отсутствие сторонних зарядов воздействие внешнего электрического поля на жидкости осуществляется за счет пондеромоторных сил, локализованных на поверхностях раздела. На базе этой модели было показано [1], что тангенциальное поле оказывает стабилизирующее воздействие на неустойчивость Кельвина –Гельмгольца при движении в направлении поля тонкого слоя диэлектрической жидкости. В работах [2–5] применительно к окруженным газом пленкам рассмотрено воздействие продольного поля на плоские капиллярные волны, в том числе с учетом сил Ван-дер-Ваальса [5].

Изучено влияние тангенциального поля на трехмерное движение вязкой диэлектрической жидкости при развитии рэлей-тейлоровской неустойчивости пленки. В отсутствие поля это явление теоретически и экспериментально исследовано в работе [6].

Постановка задачи

Рассматривается плоская в начальный момент времени $t = 0$ пленка на нижней поверхности горизонтальной толстой диэлектрической пластины, находящейся в однородном горизонтальном поле $\mathbf{E}_0$. Обозначим через ε_1, ε_2 диэлектрические проницаемости жидкости и материала пластины. Введем прямоугольную декартову систему координат x, y, z с базисом $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, ось x которой параллельна $\mathbf{E}_0$ и лежит в плоскости верхней границы пленки, а ось z направлена вертикально вниз. Нижней границей пленки является поверхность раздела $z = c(x, y, t)$ с покоящимся газом. При $t = 0$ толщина c_0 пленки мала по сравнению с капиллярной длиной $l_c = \sqrt{\alpha/\rho g}$, где ρ – плотность жидкости, g – ускорение свободного падения, α – коэффициент поверхностного натяжения.

Вызываемое силой тяжести искривление первоначально плоской свободной поверхности поляризованного жидкого диэлектрика влечет за собой появление возмущений полей $\mathbf{E}'_j = -\nabla_j$ в жидкости ($j = 1$), в пластине ($j = 2$) и в газе ($j = 3$). Пусть l – характерный линейный размер области на плоскости $z = 0$, в пределах которой толщина пленки претерпевает изменение порядка c_0. Задача электростатики в длинноволновом ($c_0/l \ll 1$) приближении записывается следующим образом:

$$\partial^2\varphi_1/\partial z^2 = 0, \quad \partial^2\varphi_j/\partial x^2 + \partial^2\varphi_j/\partial y^2 + \partial^2\varphi_j/\partial z^2 = 0, \quad j = 2,3,$$

$$z = 0: \quad \varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1\partial\varphi_1/\partial z - \varepsilon_2\partial\varphi_2/\partial z = 0; \qquad (1)$$

$$z/l \to -\infty: \quad \nabla\varphi_2 \to 0; \quad z/l \to \infty: \quad \nabla\varphi_3 \to 0,$$

$$z = c(x, y, t): \quad \varphi_1 = \varphi_3, \quad \partial\varphi_3/\partial z - \varepsilon_1\partial\varphi_1/\partial z = (\varepsilon_1 - 1)E_0\partial c/\partial x.$$

С использованием развитой в [7] методики получено уравнение, описывающее в длинноволновом приближении изменение локальной толщины пленки до момента, когда в окрестности какой-либо точки поверхности пластины область, занятая жидкостью, теряет односвязность:

$$3\eta\partial c/\partial t + \operatorname{div}\{c^3\nabla_2[\rho g c + \alpha\Delta_2 c - (\varepsilon_1 - 1)/(8\pi)]\} \times \{2E_0[\partial\varphi_1/\partial x - 2(\varepsilon_1 - 1)(\partial\varphi_1/\partial z)\partial c/\partial x] - \varepsilon_1(\partial\varphi_1/\partial z)^2\}\big|_{z=c} = 0, \qquad (2)$$

где η – коэффициент динамической вязкости жидкости, $\nabla_2 = \mathbf{e}_x\partial/\partial x + \mathbf{e}_y\partial/\partial y$, $\Delta_2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$.

Положим $c(x, y, t) = c_0 + \zeta(x, y, t)$ и ограничимся исследованием линейной ($|\zeta|/c_0 \ll 1$) стадии рэлей-тейлоровской неустойчивости.

Влияние поля на развитие неустойчивости Рэлея–Тейлора

Рассматривая линеаризованное уравнение (2) и задачу электростатики (1) с линеаризованными граничными условиями при $z = c(x, y, t)$, после нахождения пропорциональных $\exp\{i(\mathbf{kr} - \omega(k_x, k_x)t)\}$ частных решений нетрудно выписать дисперсионное уравнение; здесь $\mathbf{k} = k_x\mathbf{e}_x + k_y\mathbf{e}_y$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$. В безразмерных переменных $\kappa_1 = k_x/k_m^0$, $\kappa_2 = kr_y/k_m^0$, $\Omega_i = \omega_i\tau_0$, где $k_m^0 = 1/(\sqrt{2}\, l_c)$, $\tau_0 = 12\alpha\eta/(\rho^2 g^2 c_0^3)$, $\omega_i = \mathrm{Im}\,\omega$, дисперсионное уравнение имеет вид:

$$\Omega_i = 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2) - Q\kappa_1^2\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} - (\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^2,$$

где

$$Q = (\varepsilon_1 - 1)^2 E_0^2 /(2\pi\sqrt{2\rho g\alpha}\ (\varepsilon_2 + 1)).$$

Отсюда следует, что в отсутствие поля (случай $Q = 0$) областью неустойчивости является внутренность круга $\kappa_1^2 + \kappa_2^2 < 2$ с исключенным началом координат, в то время как моды с $\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2} > \sqrt{2}$ стабилизируются капиллярными силами.

В противоположность случаю $Q = 0$, когда дисперсионная зависимость представляется поверхностью вращения, при наличии поля ($Q \neq 0$) возникает эффект анизотропии, ввиду чего рельеф функции $\Omega_i(\kappa_1, \kappa_2)$ имеет две симметрично расположенные вершины – точки $(0, \pm 1, 1)$ – и две седловые точки $(\pm\kappa_s, 0, \Omega_i^s)$, где $k_s(Q) < 1$, $\Omega_i^s(Q) < 1$. При этом наибольшее воздействие электрическое поле оказывает на моды с волновыми векторами $\boldsymbol{\kappa}_s = (\kappa_s, 0)$ и $-\boldsymbol{\kappa}_s$, соответствующими седловым точкам.

Из записанного в полярной системе координат $\kappa_1 = \kappa\cos\vartheta$, $\kappa_2 = \kappa\sin\vartheta$ дисперсионного уравнения $\Omega_i = \kappa^2(2 - Q\kappa\cos^2\vartheta - \kappa^2)$ находим уравнение

$$\kappa = 0.5\left(-Q\cos\vartheta + \sqrt{Q^2\cos^2\vartheta + 8}\right)$$

семейства (с параметром Q) кривых нейтральной устойчивости. Отсюда следует, что при $\vartheta \neq \pi/2$, $\vartheta \neq 3\pi/2$ тангенциальное поле стабилизирует некоторый диапазон неустойчивых в отсутствие поля мод.

Анализ показал, что среди всех мод при любом $Q \neq 0$ наиболее быстро растут моды с $\mathbf{k} = \pm k_m^0\mathbf{e}_y$, не испытывающие стабилизирующего воздействия поля. Вследствие этого при достаточно больших Q и конечных t основной вклад в значение интеграла Фурье, представляющего функцию $\zeta(x, y, t)$, создают точки $(0, \pm k_m^0)$ совместно со своими малыми окрестностями. Ввиду этого на линейной стадии развития неустойчивости толщина пленки с течением времени изменяется вдоль оси x значительно медленнее, чем вдоль оси y. В результате при любом начальном возмущении $\zeta(x, y, 0)$ образуется система валов, параллельных $\mathbf{E}_0$. Отметим, что при $\mathbf{E}_0 = 0$ наблюдалась [6] структура, состоящая преимущественно из гексагональных ячеек, образованных висячими каплями.

Заключение

При наличии приложенного тангенциального электрического поля $\mathbf{E}_0$ волновые векторы наиболее быстро растущих мод ортогональны $\mathbf{E}_0$. Ввиду этого развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости пленки поляризованной диэлектрической жидкости приводит к формированию системы валов, параллельных $\mathbf{E}_0$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант №11-01-00051.

Список литературы

1. El-Sayed M.F. // Phys. Rev. E. 1999.Vol. 60, No 6. P. 7588–7591.
2. Tilley B.S., Petropoulos P.G., Papageorgiou D.T. // Phys. Fluids. 2001. Vol. 13, No12. P. 3547–3563.
3. Papageorgiou D.T., Vanden-Broeck J.-M. // J. Fluid Mech. 2004. Vol. 508. P. 71–88.
4. Papageorgiou D.T., Vanden-Broeck J.-M. // Euro. J. Appl. Math. 2004. Vol. 15. P. 609–623.
5. Savettaseranee K. et al // Phys. Fluids. 2003. Vol. 15, No 3. P. 641–652.
6. Fermigier M. et al. // J. Fluid Mech., 1992. Vol. 236. P. 349–383.
7. Oron A., Davis S.H., Bankoff S.G. // Rev. Mod. Physics. 1997. Vol. 69, No3. P. 931–980.

THE RAYLEIGH-TAYLOR INSTABILITY OF A LIQUID DIELECTRIC FILM IN A TANGENTIAL ELECTRIC FIELD

V.M. Korovin

The Rayleigh – Taylor instability of an electrifield nonconducting fluid film spread on the lower side of a horizontal dielectric plate is studied in the long-wave approximation. It is shown that due to the electric field action the Rayleigh–Taylor instability development leads to formation of a periodic liquid structure consisting of parallel rolls aligned with the field.

Keywords: film, liquid dielectric, electric field, hydrodynamic instability.